

## **CIRCUITS RLC**

**Self-inductance réelle en régime sinusoïdal permanent.**

**Condensateur réel en régime sinusoïdal permanent.**

**Généralisation du passage réversible de la forme impédance à la forme admittance.**

**Circuit RLC série excité en tension à fréquence variable.**

**Circuit RLC série : filtres du 2<sup>o</sup> ordre.**

**Circuit RLC parallèle excité en courant à fréquence variable.**

**Circuits RLC en régime transitoire.**

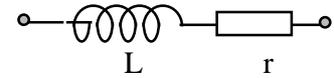
**Application : entretien des oscillations dans un circuit RLC série compensé par une résistance négative.**

**Circuits couplés par mutuelle inductance.**

## I. SELF-INDUCTANCE REELLE EN REGIME SINUSOIDAL PERMANENT

### 1) Coefficient de qualité d'une self-inductance.

Considérons une self-inductance  $L$  dont l'ensemble des imperfections est représenté par une résistance série  $r$ . Son impédance est telle que :  $Z = r + j\omega L$  (1). Soit :



$$Z = j\omega L \left( 1 + j\frac{r}{\omega L} \right) \quad (2)$$

Pour comparer les self-inductances, on leur attribue un coefficient de qualité :

$$Q_L(\omega) = \frac{\omega L}{r} \quad (3)$$

Ainsi, à une fréquence donnée, une self-inductance ayant une résistance série de valeur très faible possède un coefficient de qualité important. Elle se rapproche alors d'une self-inductance parfaite telle que :  $Z = j\omega L$ .

### 2) Passage de la forme impédance $Z$ a la forme admittance $Y$ .

Cette transformation peut être utile lors de la mise en équation d'un schéma. Lorsque les self-inductances fonctionnent à une fréquence où leur  $Q_L$  est suffisamment important, il est possible de donner à ce composant une image admittance  $Y$ .

$$Y = \frac{I}{Z} = \frac{I}{r + j\omega L}$$

Multiplications par la quantité conjuguée :  $Y = \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2}$

Mettons en évidence le coefficient de qualité  $Q_L$  :

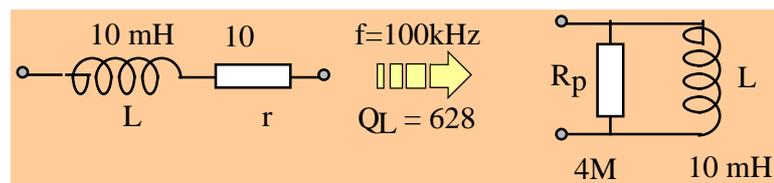
$$Y = \frac{r}{(\omega L)^2 \left( \frac{1}{Q_L^2(\omega)} + 1 \right)} - j \frac{\omega L}{(\omega L)^2 \left( \frac{1}{Q_L^2(\omega)} + 1 \right)}$$

Si la fréquence d'utilisation est telle que :  $\frac{1}{Q_L^2(\omega)}$  inférieur à 1, on peut écrire :

$$Y \approx \frac{r}{(\omega L)^2} + \frac{1}{j\omega L} \quad \text{soit compte-tenu de (3) :} \quad Y = Q_L^2(\omega)r + \frac{1}{j\omega L}$$

L'admittance image est composée de la self-inductance parfaite  $L$  et d'une résistance parallèle :  $R_p = Q_L^2(\omega).r$ .

**Exemple :** à la fréquence de 100 kHz, une self-inductance  $L$  de 10 mH, de résistance série  $r$  de 10  $\Omega$ , ayant alors un coefficient de qualité  $Q_L$  de 628, est simulée par une self  $L = 10\text{mH}$  de résistance parallèle  $R_p$  de 4M  $\Omega$ .



## II. CONDENSATEUR REEL EN REGIME SINUSOIDAL PERMANENT

### 1) Coefficient de qualité d'un condensateur.

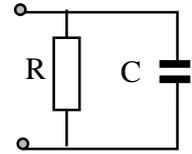
Considérons un condensateur C dont l'ensemble des imperfections est représenté par une résistance parallèle R. Son admittance est telle que :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C \quad (4) \text{ soit : } \underline{Y} = j\omega C \left(1 - \frac{j}{\omega RC}\right) \quad (5)$$

Pour comparer les condensateurs, on leur attribue un coefficient de qualité :

$$Q_C(\omega) = \omega RC \quad (6)$$

Ainsi, à une fréquence donnée, un condensateur ayant une résistance parallèle de forte valeur possède un coefficient de qualité important. Il se rapproche d'une capacité parfaite.



### 2) Passage de la forme admittance Y à la forme impédance Z.

Lorsque les condensateurs fonctionnent à une fréquence où leur  $Q_C(\ )$  est suffisamment important, il est possible de donner à ce composant une image impédance Z.

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}$$

Multiplions par la quantité conjuguée : 
$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} - j \frac{\omega C}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$$

Mettons en évidence le coefficient de qualité  $Q_C$  :

$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{R(\omega C)^2}}{\left(\frac{1}{R^2} + 1\right)} - j \frac{\frac{\omega C}{(\omega C)^2}}{\left(\frac{1}{R^2} + 1\right)}$$

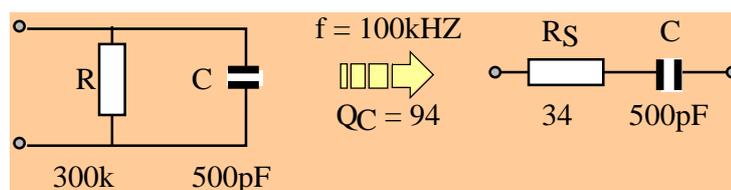
Si la fréquence d'utilisation est telle que :  $\frac{1}{Q_C^2(\omega)} \ll 1$ , on peut écrire :

$$\underline{Z} \approx \frac{1}{R(\omega C)^2} + \frac{1}{j\omega C} \quad \text{soit, compte-tenu de (6) : } \underline{Z} = \frac{R}{Q_C^2(\omega)} + \frac{1}{j\omega C}$$

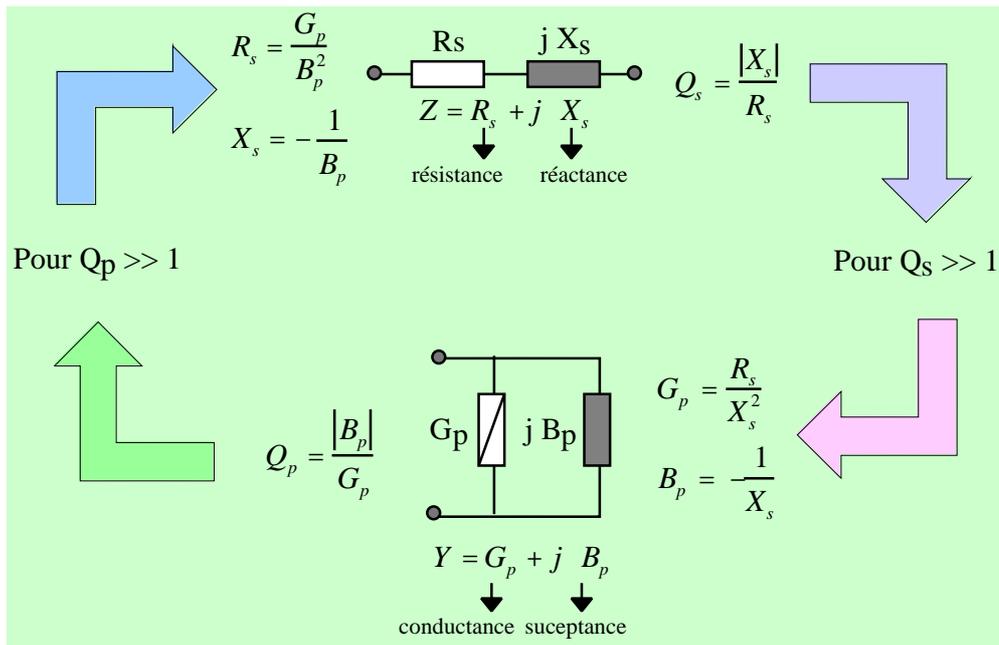
L'impédance image est composée d'un condensateur parfait C et d'une résistance série

$$R_s = \frac{R}{Q_C^2(\omega)}$$

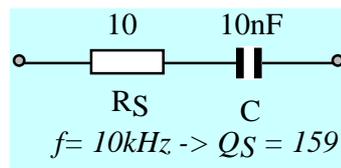
**Exemple** : à la fréquence de 100 kHz, un condensateur C de 500pF, de résistance parallèle R égale à 300 k , ayant alors un coefficient de qualité  $Q_C$  de 94, est simulé par un condensateur C de 500pF de résistance série  $R_s = 34 \ \Omega$  .



### III. GENERALISATION DU PASSAGE DE LA FORME $Z \leftrightarrow Y$



**Exemple :** Considérons un condensateur  $C$  parfait ayant en série une résistance  $R_s$ .

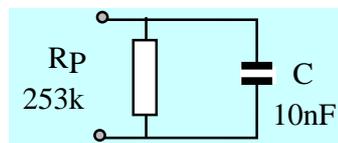


L'impédance a pour expression :  $Z = R_s + j \frac{-1}{\omega C}$ .

A la fréquence  $f$ , on attribue à l'ensemble un coefficient de qualité :  $Q_s = \frac{1}{\omega R_s C}$ .

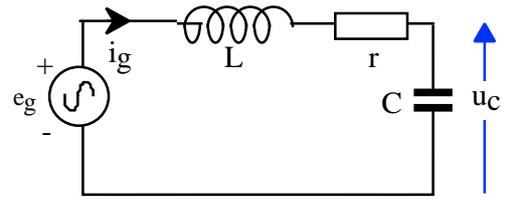
Si  $Q_s$  est suffisamment important, on transforme le circuit série en un circuit parallèle composé de la même capacité  $C$  ( $jB_p = j C$ ) munie d'une résistance en parallèle :

$$R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{1}{R_s \omega^2 C^2}$$



#### IV. CIRCUIT RLC SERIE EXCITE EN TENSION A FREQUENCE VARIABLE

On considère le circuit RLC série suivant excité par une tension sinusoïdale :  $e_g = E_{gm} \sin(2\pi ft)$ .



#### 1) Impédance du montage :

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (7)$$

##### a. Fréquence de résonance.

On appelle fréquence de résonance  $f_0$  du circuit la fréquence pour laquelle la partie imaginaire de (7) est nulle.

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad (8) \quad \text{soit :} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

##### b. Coefficient de qualité du circuit $Q_s$ du circuit RLC série.

A la fréquence de résonance, la self-inductance  $L$  de résistance série  $r$ , possède un coefficient de qualité (relation (3)) qui est par définition celui du circuit RLC série :

$$Q_s = \frac{L\omega_0}{r} \quad (9) \quad \text{soit compte-tenu de (8) :} \quad Q_s = \frac{1}{\omega_0 r C} \quad (10)$$

#### 2) Impédance du circuit en fonction de $Q_s$ et de la fréquence réduite.

La pulsation de résonance et le coefficient de qualité  $Q_s$  du circuit RLC constituent les paramètres physiques essentiels du montage. Aussi, pour généraliser, on va exprimer l'impédance  $Z$  du circuit en fonction de  $Q_s$  et de la fréquence réduite :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \quad (11)$$

La relation (7) s'écrit :  $Z = r\left(1 + j\left(\frac{\omega_0 L}{r} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 r C} \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$

Il vient alors avec (9) (10) et (11) :  $Z = r\left(1 + jQ_s\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$  (12)

La figure 1 représente les graphes de l'évolution du module et de l'argument de  $Z$  en fonction de la fréquence réduite  $x$  pour  $r = 10$  et  $Q_s = 10$ .

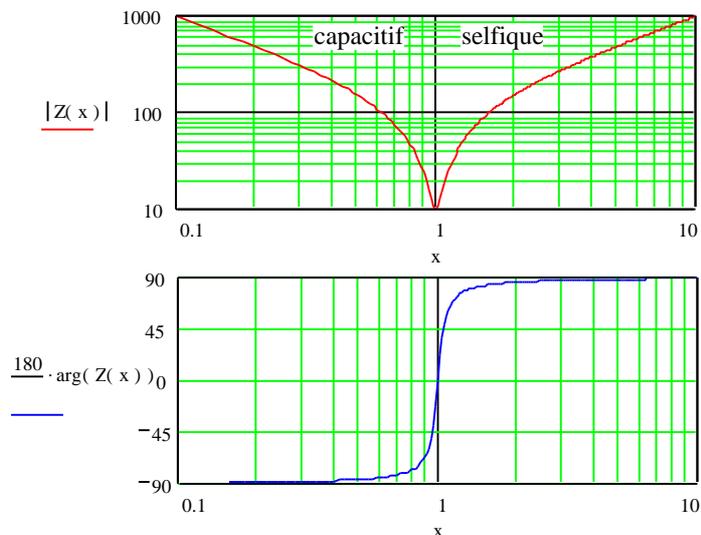


Figure 1 : module et argument de  $Z$  en fonction de la fréquence réduite  $x$

### 3) Expression approchée de l'impédance $Z$ autour de la fréquence de résonance $f_0$ .

La partie la plus intéressante la variation fréquentielle de l'impédance  $Z$  du circuit se situe autour de  $x = 1$ . A cet effet, on change de variable au profit de la dissonance qui évolue autour de 0 :

$$\delta = \frac{f - f_0}{f_0} = x - 1$$

La relation (12) s'écrit alors :  $Z = r(1 + jQ_s \frac{x^2 - 1}{x})$        $Z = r(1 + jQ_s \frac{(x-1)(x+1)}{x})$

Sachant que :  $x = 1 + \delta$  :  $Z = r(1 + jQ_s \frac{\delta(\delta + 2)}{\delta + 1})$

Pour  $\delta$  voisin de zéro, on obtient la forme approchée de l'impédance autour de la résonance :

$$Z = r(1 + j 2 Q_s \delta) \quad (12)$$

### 4) Etude de la tension aux bornes du condensateur : surtension.

Exprimons la tension  $u_c$  :  $u_c = e_g \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{Z}$  soit :  $u_c = e_g \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{r(1 + jQ_s(x - \frac{1}{x}))}$

Exprimons en fonction du coefficient de qualité du montage :

$$u_c = e_g \frac{1}{j\omega_0 Cr} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{(1 + jQ_s(x - \frac{1}{x}))} \text{ soit avec (10) :}$$

$$u_c = e_g \frac{Q_s}{jx} \frac{1}{(1 + jQ_s(x - \frac{1}{x}))} = e_g \frac{Q_s}{jx + Q_s(1 - x^2)} \quad (13)$$

La figure 2 représente le module et l'argument de la tension  $u_c$  pour un coefficient de qualité  $Q_s = 10$  et  $E_{gm} = 1V$ . On remarque la présence d'une surtension au voisinage de  $x = 1$  où la tension  $u_c$  est égale à  $Q_s \cdot E_{gm}$  soit 10V.

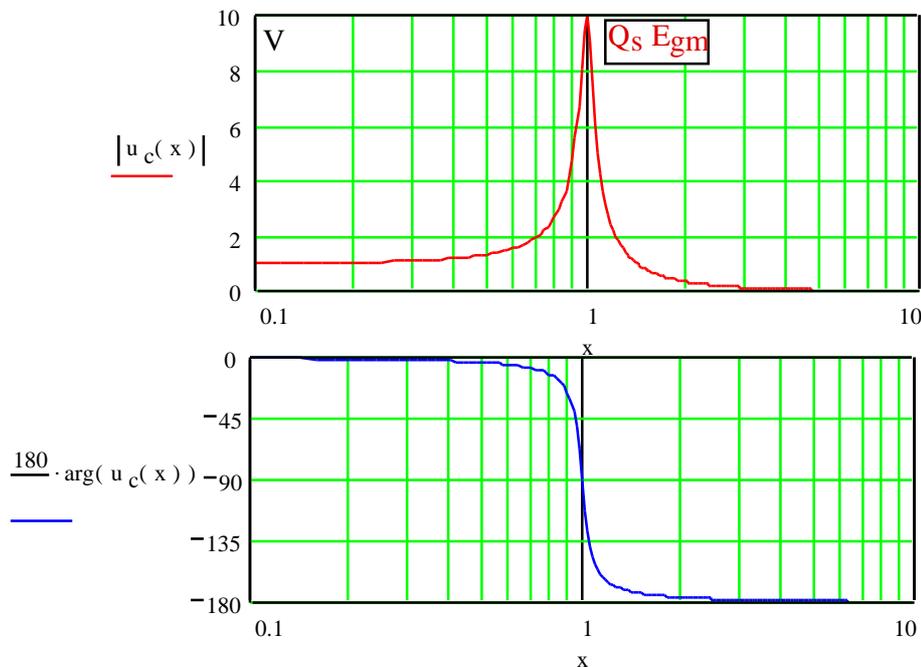


Figure 2

4) **Expression de la fréquence réduite  $x_1$  qui correspond au maximum de  $u_c$ .**

Exprimons le module de  $u_c$  :  $|u_c| = \frac{E_{gm} Q_s}{\sqrt{x^2 + Q_s^2(1 - x^2)^2}}$

Le maximum du module de  $u_c$  se produit lorsque le dénominateur est minimum.

Calculons sa dérivée par rapport à  $x$  :  $\frac{d}{dx} (x^2 + Q_s^2(1 - x^2)^2) = 2x(1 - 2Q_s^2(x^2 - 1))$

Cette dérivée est nulle pour la fréquence réduite :  $x_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_s^2}}$

Lorsque le coefficient de qualité est supérieur à 5, on peut avec une très bonne approximation, assimiler  $x_1$  à  $x = 1$  c'est-à-dire à la fréquence de résonance  $f_0$ .

5) **Bande passante de la tension aux bornes du condensateur.**

La bande passante est située de part et d'autre de  $x=1$ . Aussi il est plus pratique de prendre l'expression du module de la tension  $u_c$  en fonction de la variable dissonance :

$$|u_c| = \frac{Q_s E_{gm}}{\sqrt{1 + 4Q_s^2 \delta^2}}$$

Les dissonances de coupures (figure 3) correspondent à :  $\frac{Q_s E_{gm}}{\sqrt{2}}$ , soit :  $4Q_s^2 \delta = 1$ .

Solutions :  $\delta_1 = \frac{1}{2Q_s}$  et  $\delta_2 = -\frac{1}{2Q_s}$ .

Sachant que :  $\delta = \frac{f - f_0}{f_0}$ , on en déduit la bande passante de la tension  $u_c$  :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_s} \quad (14)$$

La figure 3 représente le module de la tension  $u_c$  en fonction de  $\delta$  autour de la résonance avec  $Q_s = 10$  et  $E_{gm} = 1V$ .

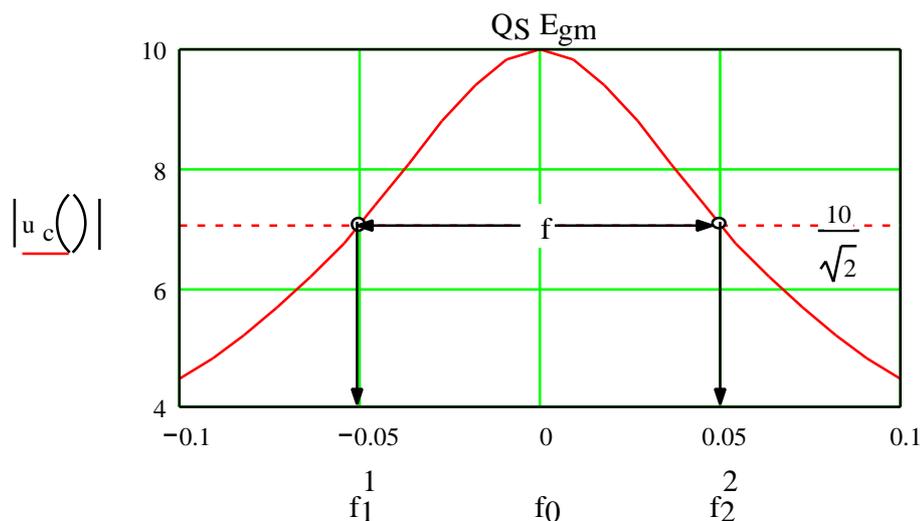
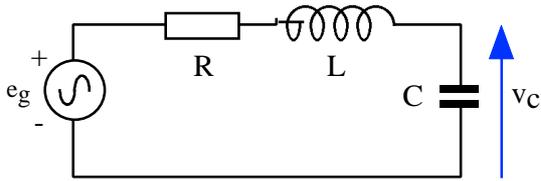


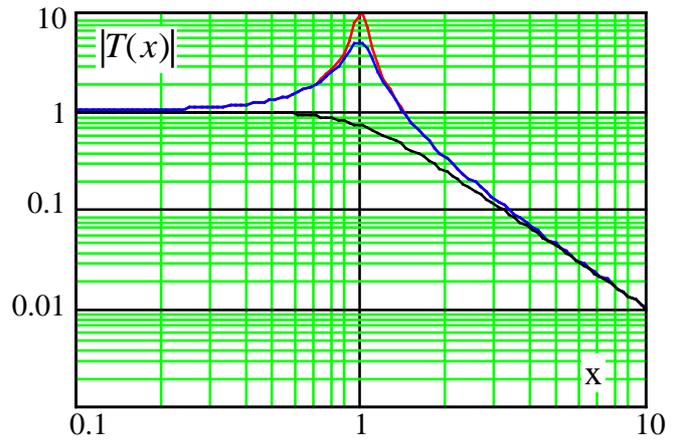
Figure 3

## CIRCUIT RLC SERIE EN REGIME SINUSOIDAL : FILTRES 2° ORDRE

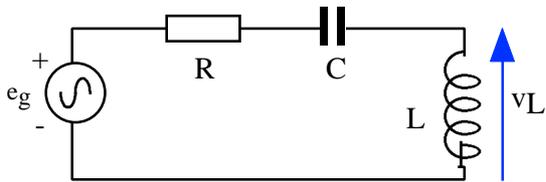
### Filtre passe-bas



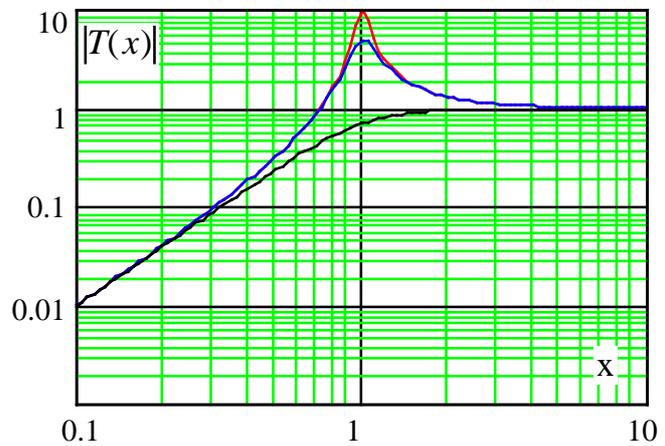
$$T(x) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$



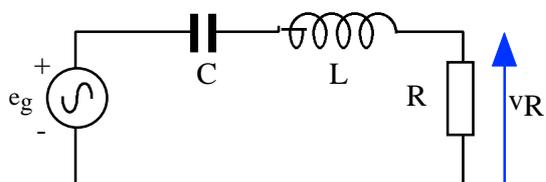
### Filtre passe-haut



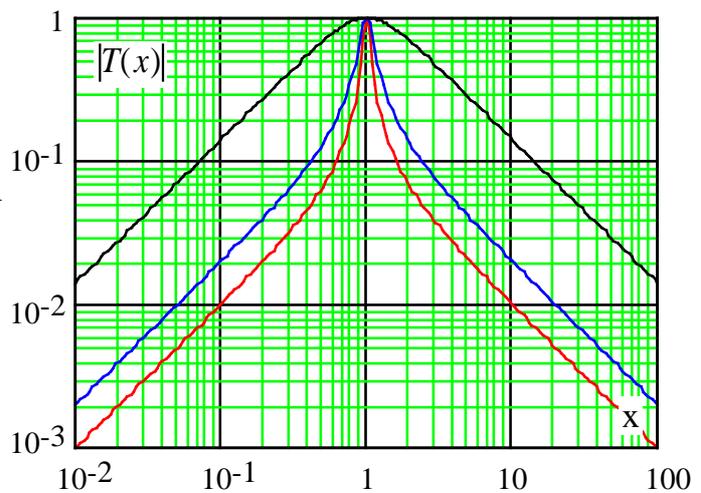
$$T(x) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$



### Filtre passe-bande



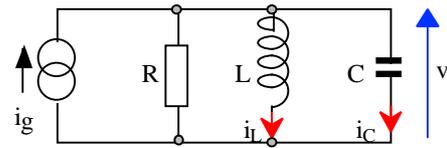
$$T(x) = \frac{-j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$



Les courbes de réponses sont données pour 3 valeurs du coefficient de qualité  $Q$  : 10, 5 et  $2/2$ .  
 $x = f / f_0$  est la fréquence réduite et  $f_0$  la fréquence de résonance

## V. CIRCUIT RLC PARALLELE EXCITE EN COURANT A FREQUENCE VARIABLE

On considère le circuit RLC parallèle suivant excité par un courant sinusoïdal :  $i_g = I_{gm} \sin(2\pi ft)$ . La résistance  $R$  représente l'image parallèle de la résistance série  $r$  de la self-inductance ( $R = Q_L^2 \cdot r$ ).



### 1) Impédance du montage :

$$Y = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \quad (15)$$

#### a. Fréquence de résonance.

On appelle fréquence de résonance  $f_0$  du circuit la fréquence pour laquelle la partie imaginaire de (7) est nulle.

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad (16) \quad \text{soit :} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

#### b. Coefficient de qualité du circuit $Q_s$ du circuit RLC série.

A la fréquence de résonance, le module de la tension  $v$  prend la valeur  $RI_{gm}$ . Exprimons dans ces conditions l'expression du courant dans la self-inductance et la capacité :

$$(i_L)_{\omega_0} = \frac{v}{j\omega_0 L} \quad |i_L|_{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} I_{gm} \quad (i_C)_{\omega_0} = j\omega_0 C v \quad |i_C|_{\omega_0} = \omega_0 R C I_{gm}$$

A la résonance, ces deux courants doivent s'annuler. Ils doivent avoir la même amplitude, avec une phase opposée. On remarquera que leur amplitude est plus élevée que celle du générateur. On définit donc le coefficient de qualité  $Q_p$  du circuit RLC parallèle :

$$Q_p = \frac{R}{\omega_0 L} = RC\omega_0 \quad (17)$$

### 2) Admittance du circuit en fonction de $Q_p$ et de la fréquence réduite.

La pulsation de résonance et le coefficient de qualité  $Q_p$  du circuit RLC parallèle constituent les paramètres physiques essentiels du montage. Aussi, on va exprimer l'admittance du circuit en

fonction de  $Q_p$  et de la fréquence réduite :  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \quad (18)$

La relation (15) s'écrit aussi :  $Y = G(1 + j(\frac{\omega_0 C}{G} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 R L} \frac{\omega_0}{\omega}))$

Il vient alors avec (17) et (18) :  $Y = G(1 + jQ_p(x - \frac{1}{x})) \quad (19)$

La figure 4 représente les graphes de l'évolution du module et de l'argument de  $Y$  en fonction de la fréquence réduite  $x$  pour  $G = 10^{-5}S$  et  $Q_p = 10$ .

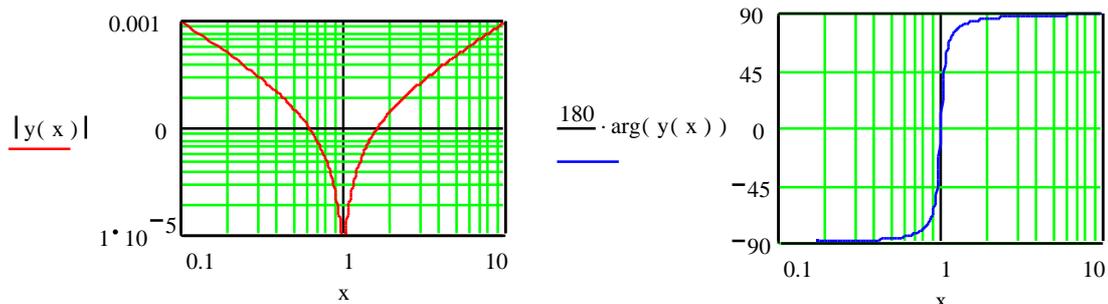


Figure 4

### 3) Expression approchée de l'admittance autour de $x = 1$ soit : $f = f_0$ .

La partie la plus intéressante du comportement de l'admittance du circuit se situe autour de  $x$  égal à 1. A cet effet, on utilise la variable dissonance :  $\delta = \frac{f - f_0}{f_0} = x - 1$

La relation (19) s'écrit :  $\underline{Y} = G(1 + jQ_p(\frac{x^2 - 1}{x}))$   $\underline{Y} = G(1 + jQ_p \frac{(x - 1)(x + 1)}{x})$

Sachant que :  $x = 1 + \delta$  :  $\underline{Y} = G(1 + jQ_p \frac{\delta^2 + 2\delta}{\delta + 1})$

Pour  $\delta$  voisin de zéro, on obtient la forme approchée de l'impédance :

$$\underline{Y} = G(1 + j 2 Q_p \delta) \quad (20)$$

### 4) Tension aux bornes du montage : bande passante.

La tension  $v$  aux bornes du montage s'exprime :  $v = \frac{i_g}{Y}$  soit :  $v = \frac{i_g}{G(1 + jQ_p(x - \frac{1}{x}))}$

La figure 5 représente l'évolution du module et de l'argument de la tension  $v$  en fonction de la fréquence réduite  $x$  ( $I_{gm} = 1$  mA,  $G = 10^{-5}$  S et  $Q_p = 10$ ).

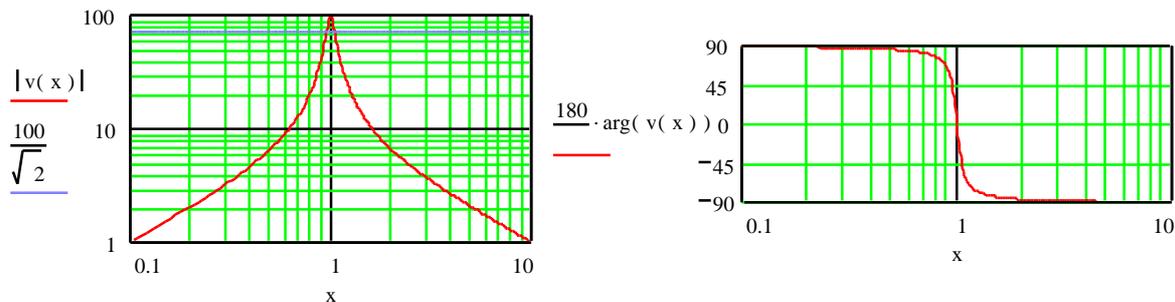


Figure 5

Exprimons le module de  $v$  :  $|v| = \frac{RI_{gm}}{\sqrt{1 + Q_p^2(x - \frac{1}{x})^2}}$

Pour  $x = 1$  le module de la tension  $v$  est maximal :  $v_{max} = RI_{gm} = 100$  V.

La partie la plus intéressante du comportement du circuit se situe autour du maximum où  $x$  est égal à 1 ou bien  $\delta = 0$ . En utilisant la dissonance  $\delta$ , le module de  $v$  s'exprime selon :

$$|v| = \frac{RI_{gm}}{\sqrt{1 + 4Q_p^2\delta^2}}$$

Les dissonances de coupures à correspondent à :  $4Q_p^2\delta = 1$  soit :  $\frac{RI_{gm}}{\sqrt{2}}$ .

Solutions :  $\delta_1 = \frac{1}{2Q_p}$  et  $\delta_2 = -\frac{1}{2Q_p}$ . On en déduit, comme pour le circuit RLC série, la bande passante du circuit :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_p} \quad (21).$$

## **CIRCUITS RLC EN REGIME TRANSITOIRE**

# CIRCUITS RLC EN REGIME TRANSITOIRE

## 1<sup>ière</sup> PARTIE : CIRCUIT RLC SERIE EN REGIME LIBRE

On considère le montage RLC série suivant où la capacité est initialement chargée sous la tension E sachant que l'interrupteur K est placé sur la position 1. A l'instant  $t = 0$ , on bascule K en position 2. On se propose de chercher l'expression de la tension  $v(t)$  avec une résistance R est variable.

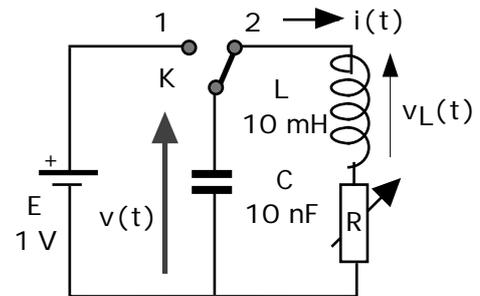
Sachant que :  $v_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $i = -C \frac{dv}{dt}$ , en introduisant les caractéristiques fondamentales du circuit RLC

série, à savoir résonance  $\omega_0$  et coefficient de qualité Q ou m l'amortissement, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 m \omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0 \quad \dots(1)$$

*m : coefficient d'amortissement*

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2m} = \frac{L \omega_0}{R}$$



La tension  $v(t)$  est la solution d'une équation différentielle du 2<sup>o</sup> ordre avec 2<sup>o</sup> membre nul. Dans cette solution vont apparaître deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  qui seront calculées à partir des conditions initiales. En effet à l'instant  $t = 0$  :

- Le condensateur C "garde ses charges" soit :  $v(0^-) = v(0^+) = E$
- L'inductance L "garde son courant" soit :  $i(0^-) = i(0^+) = 0 \text{ mA}$

### 1. OSCILLATIONS PROPRES DU CIRCUIT OSCILLANT

On envisage d'abord le cas purement théorique où  $R = 0$ , soit un amortissement  $m = 0$  (ou  $Q = \infty$ )

L'équation différentielle (1) devient alors :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega_0^2 v = 0 \quad \text{solution : } v(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

La tension aux bornes du condensateur est purement cosinusoidale. Il se produit un échange périodique de l'énergie initiale stockée dans le condensateur, entre ce dernier et la self. Lorsqu'on ferme l'interrupteur K, on offre ainsi, à la capacité, un circuit lui permettant de se décharger. A l'instant  $t = T/4$ , la capacité est déchargée, mais le courant  $i$  est extremum et l'inductance ne tolérant aucune variation brutale de courant, prolonge ce courant en provoquant la charge de la capacité en sens inverse et ainsi de suite.

### 2. OSCILLATIONS PROPRES AMORTIES DU CIRCUIT OSCILLANT

Dans le cas général où R n'est pas nulle, l'équation (1) admet des solutions de la forme :

$$v = E e^{p.t} \quad \frac{dv}{dt} = E p e^{p.t} \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = E p^2 e^{p.t}$$

Ce qui conduit à l'équation caractéristique du 2<sup>o</sup> degré :  $p^2 + 2 m \omega_0 p + \omega_0^2 = 0$  (2) dont les solutions dépendent du déterminant  $\Delta' = \omega_0^2 \sqrt{m^2 - 1}$  lié à la résistance R du montage que l'on peut écrire :

$$R = 2 m L \omega_0 = 2 m \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le circuit oscillant fonctionne dans trois régimes suivant la valeur de la résistance R.

a) **Régime Critique : m = 1 (Q = 0.5) pour une résistance**  $R_{critique} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

L'équation caractéristique (2) a une racine double  $p = -\omega_0$  et la solution de (1) est de la forme :

$$v(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\omega_0 t)$$

La recherche des constantes  $C_1$  et  $C_2$  à  $t = 0$  donne :  $C_1 = E$  et  $C_2 = E \omega_0$

Pour  $L = 10$  mH,  $C = 10$  nF et  $R = R_{critique} = 2$  K, le graphe de  $v(t)$  pour  $m = 1$  est donné en fig. 1

b) **Régime hypercritique : m > 1 (Q < 0.5) soit R > R<sub>critique</sub>**

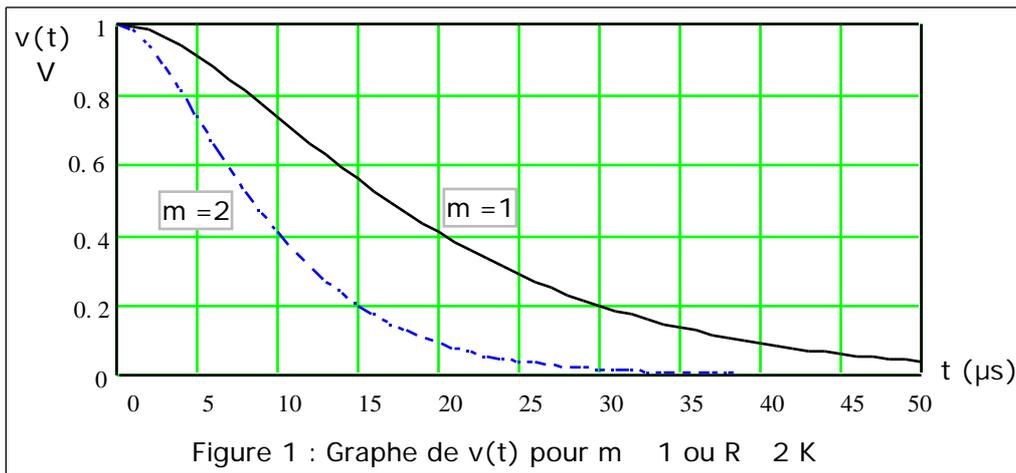
Les racines de l'équation caractéristique (2) sont alors réelles :  $p_{1,2} = -\omega_0 (-m \pm \sqrt{m^2 - 1})$  et la solution (voir cours de math) de l'équation (1) s'écrit :

$$v(t) = C_1 \exp(p_1 t) + C_2 \exp(p_2 t)$$

La recherche des constantes  $C_1$  et  $C_2$  liées aux conditions initiales conduit à :

$$C_1 = \frac{E p_2}{p_2 - p_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{E p_1}{p_1 - p_2}$$

Pour  $m = 2$ , la figure 1 donne l'évolution de la tension  $v(t)$  qui garde la même esthétique lorsque  $m = 1$ .



c) **Régime des oscillations amorties : 0 < m < 1 (Q > 0.5) soit R < R<sub>critique</sub>**

Le déterminant de l'équation caractéristique (2) a deux racines imaginaires :

$$p_{1,2} = -m \omega_0 \pm j \omega_1 \quad \text{avec} : \omega_1^2 = \omega_0^2 (1 - m^2)$$

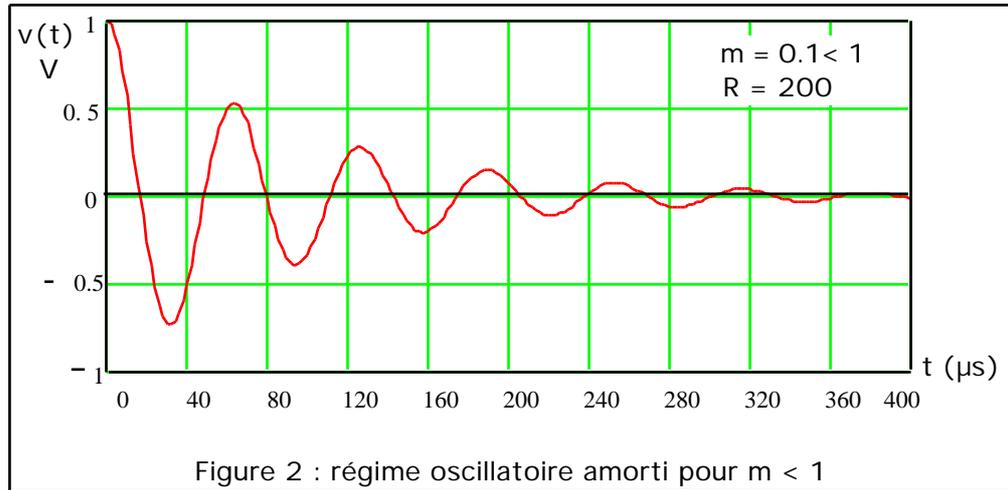
La pulsation  $\omega_1$  est la pseudo-période et compte-tenu des conditions initiales, on obtient encore :

$$C_1 = \frac{E p_2}{p_2 - p_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{E p_1}{p_1 - p_2}$$

Sachant que :  $\sin(\omega t) = \frac{\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)}{2j}$  et  $\cos(\omega t) = \frac{\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)}{2}$ , il est alors possible de mettre la tension  $v(t)$  sous la forme :

$$v(t) = E \cdot \left[ \exp(-m \omega_0 t) \right] \left[ \cos(\omega_0 t) + \frac{m \omega_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right]$$

Le graphe de la tension  $v(t)$  montre en figure 2 un régime oscillatoire amorti.



Remarque: en posant  $\tan \theta = m \omega_0 / \omega_1$  l'équation précédente prend aussi la forme :

$$v(t) = \frac{E}{\cos \theta} \exp(-m\omega_0 t) \cos(\omega_1 t - \theta)$$

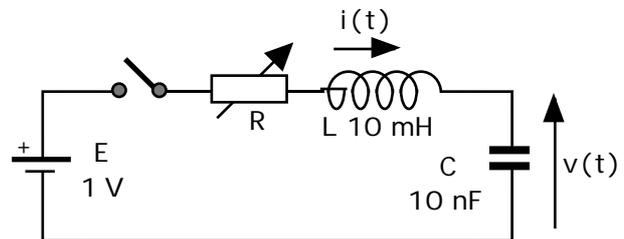
**2 ème PARTIE : CIRCUIT RLC SERIE ALIMENTE PAR UNE TENSION CONSTANTE**

Considérons le schéma suivant. A l'instant  $t = 0$  (où  $i(0) = 0$  mA et  $v(0) = 0$  V), on ferme l'interrupteur. On se propose de chercher l'évolution en fonction du temps de la tension  $v(t)$  aux bornes du condensateur. Mise en équations :

$$E = R i(t) + L \frac{di}{dt} + v(t) \quad \text{avec : } i = C \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 m \omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \frac{E}{LC} \quad (3)$$

en posant :  $LC \omega_0^2 = 1$  et  $Q = \frac{1}{2m} = \frac{L\omega_0}{R}$



Contrairement à l'équation (1), l'équation (3) est une équation différentielle du 2° ordre avec 2° membre non nul dont la solution (voir cours de math) est égale à la somme : de l'équation différentielle avec 2° membre nul et d'une solution particulière de l'équation avec 2° membre.

**1) SOLUTION PARTICULIERE**

Le 2° membre étant constant, cherchons une solution de ce type à savoir  $v(t) = \text{Constante}$ . Il vient alors :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \quad \text{et l'équation (3) indique : } v(t) = \frac{E}{LC \omega_0^2} = E$$

Cette solution particulière est physiquement évidente. En effet, si le temps  $t$  tend vers l'infini, la capacité finira bien par se charger sous la tension  $E$  du générateur.

**2) SOLUTION COMPLETE**

A la solution particulière précédente, il faut ajouter la solution générale de l'équation avec 2° membre nul. En ce qui concerne la solution générale, on se retrouve dans la situation de la 1° partie avec les trois possibilités régies par le coefficient d'amortissement  $m = 1 / 2Q$ .

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont à nouveau déterminées à  $t = 0$  (conditions initiales) à partir de la solution complète.

a) Coefficient d'amortissement  $m > 1$ , solution complète de l'équation (3) :

$$v(t) = E + C_1 \exp(-p_1 t) + C_2 \exp(-p_2 t)$$

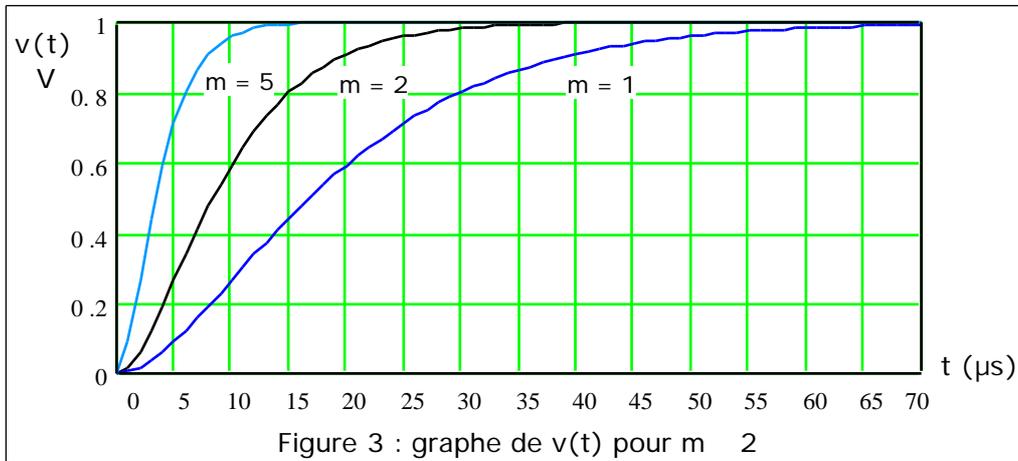
$$\text{où } p_{1,2} = \omega_0 (-m \pm \sqrt{m^2 - 1})$$

Les conditions initiales :  $v(0^+) = v(0^-) = E + C_1 + C_2 = 0$  et  $i(0^+) = i(0^-) = p_1 C_1 + p_2 C_2 = 0$  conduisent à :  $C_1 = \frac{-p_2 E}{p_2 - p_1}$  et  $C_2 = \frac{-p_1 E}{p_1 - p_2}$ . Le graphe de la tension  $v(t)$  est donné en figure 3

b) Coefficient d'amortissement  $m = 1$ , solution complète de l'équation (3) :

$$v(t) = E - E(1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)$$

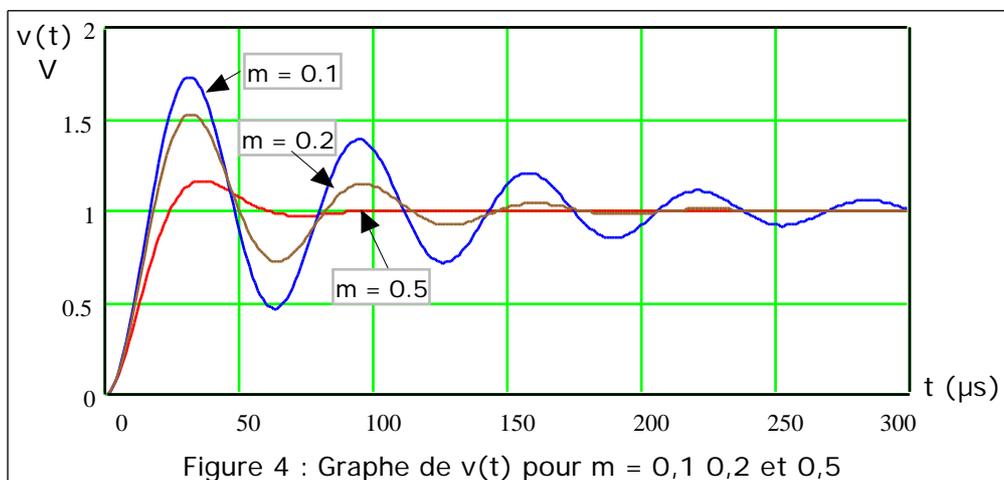
Le graphe de la tension  $v(t)$  est donné en figure 3. Pour  $m = 1$ , l'esthétique des courbes est similaire.



c) Coefficient d'amortissement  $0 < m < 1$ , solution complète de l'équation (3) et graphe :

$$v(t) = E - \frac{E}{\sqrt{1 - m^2}} \exp(-m\omega_0 t) \cos(\omega_1 t + \Phi)$$

$$\text{avec : } \tan(\Phi) = -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$$

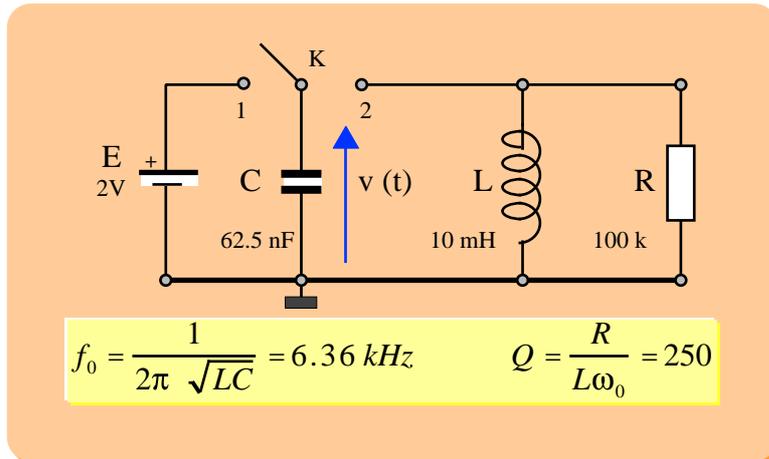


## **APPLICATION**

**ENTRETIEN DES OSCILLATIONS DANS UN CIRCUIT RLC SERIE**

**COMPENSE PAR UNE RESISTANCE NEGATIVE**

## CIRCUIT RLC PARALLELE : OSCILLATIONS AMORTIES



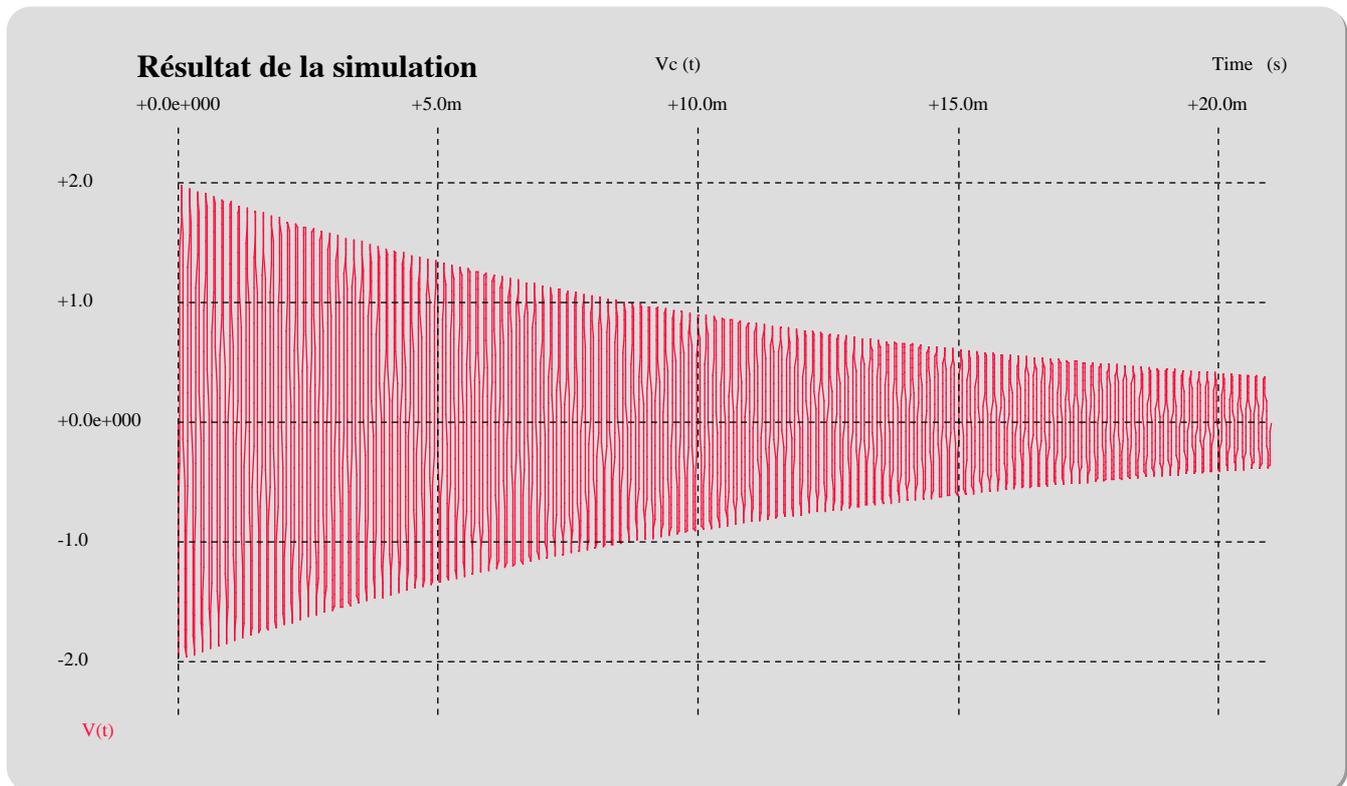
Interrupteur K en position 1 : la capacité se charge sous 2 V.

Interrupteur K en position 2 : La tension  $v(t)$  aux bornes du circuit RLC parallèle satisfait à l'équation différentielle du 2<sup>o</sup> ordre :

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2 = 0$$

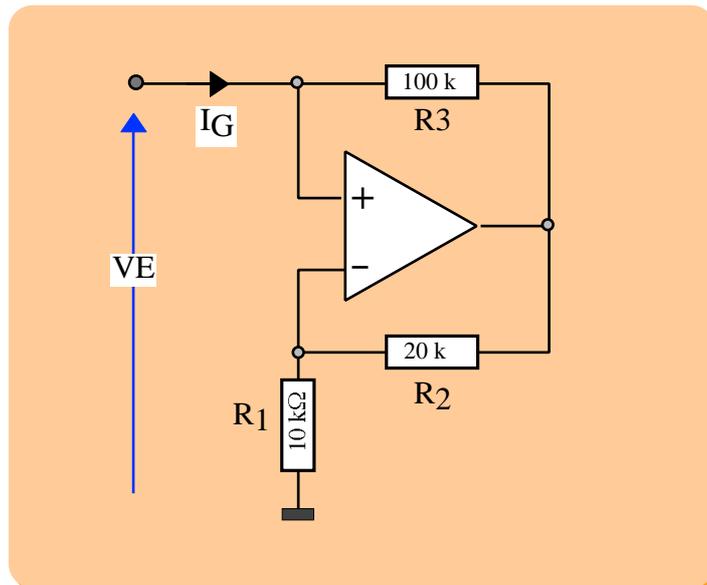
solution :  $v(t) = 2 \exp(-80 t) \cos(\omega_0 t)$

Les oscillations du circuit sont amorties et disparaissent.



Pour entretenir l'amplitude des oscillations, on va compenser la résistance R qui amorti le circuit R L.

## CONCEPTION D'UNE RESISTANCE NEGATIVE



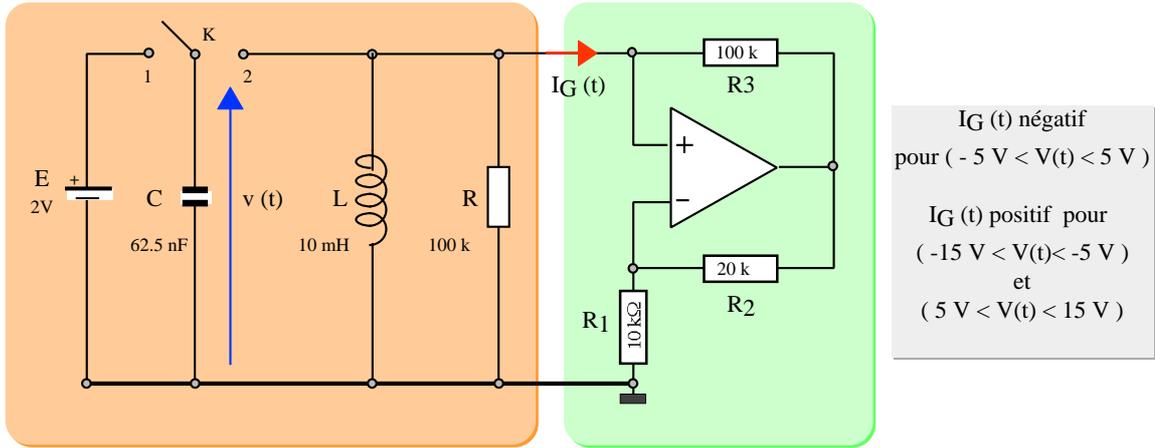
Lorsque l'amplificateur dont le gain en tension est égal à 3, fonctionne dans sa zone linéaire ( $-5 \text{ V} < V_E < 5 \text{ V}$ ) sa résistance d'entrée est négative :  $R_E = -50 \text{ k}$  ( $I_G$  est négatif).

En dehors de cette zone ( $-15 \text{ V} < V_E < -5 \text{ V}$  et  $5 \text{ V} < V_E < 15 \text{ V}$ ), l'amplificateur sature. Sa tension de sortie est respectivement égale à  $-15 \text{ V}$  et  $+15 \text{ V}$  et sa résistance d'entrée est positive :  $R_E = +100 \text{ k}$  ( $I_G$  est positif).

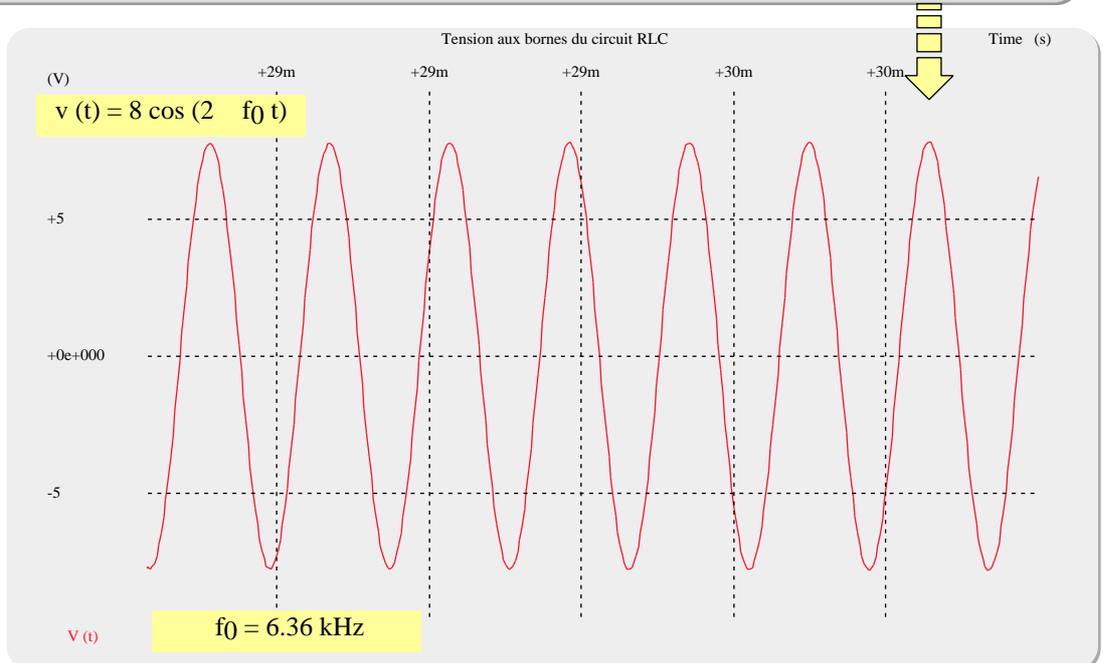
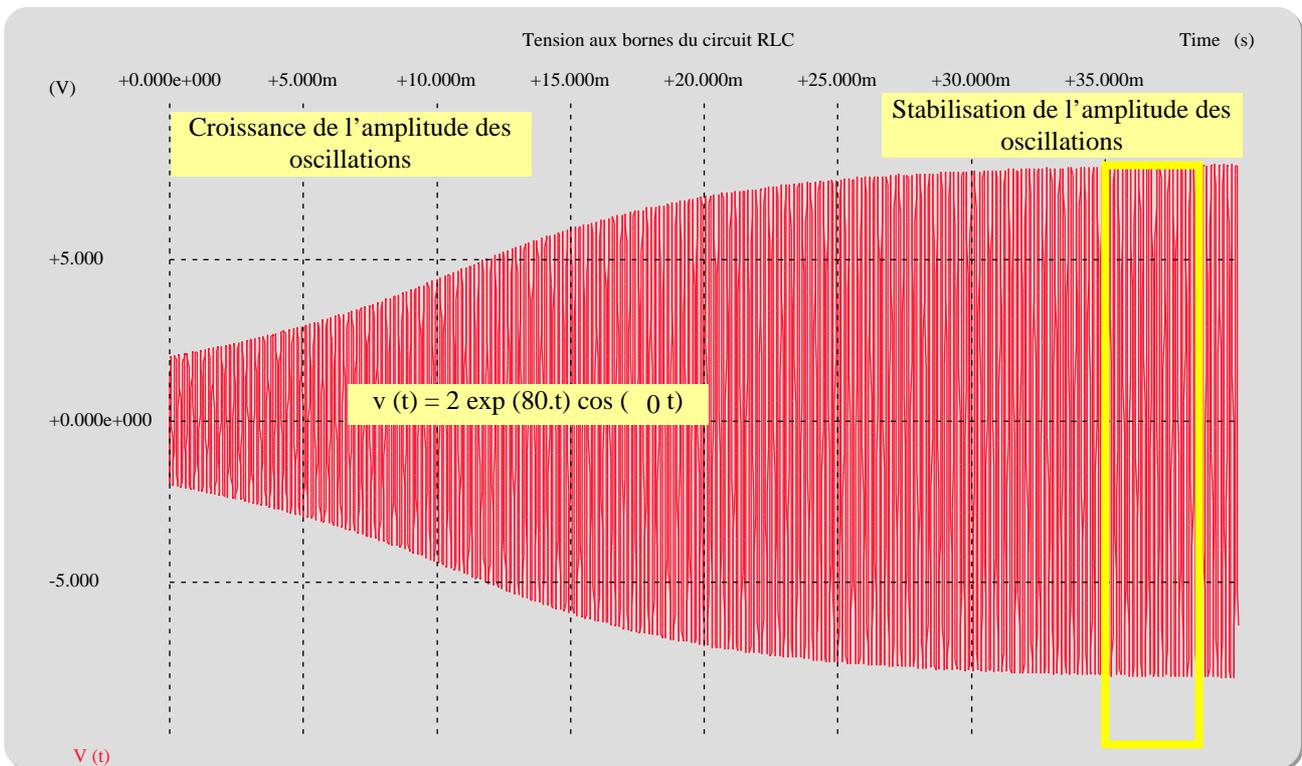
**Courant d'entrée  $I_G$  en fonction de  $V_E$**



## REALISATION D'UN OSCILLATEUR SINUSOIDAL



Lorsque l'énergie dissipée dans R est compensée par l'énergie fournie par le circuit à résistance négative, l'amplitude de la tension  $v(t)$  se stabilise à 8 V.



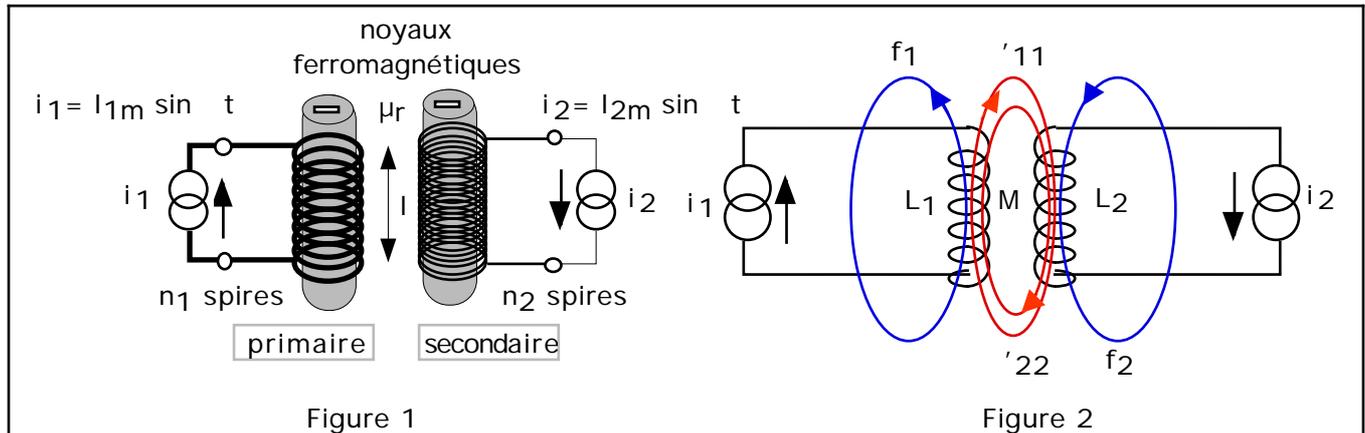
## **CIRCUITS COUPLES PAR MUTUELLE INDUCTANCE**

# CIRCUITS COUPLÉS PAR MUTUELLE INDUCTANCE

## 1° PARTIE : RAPPELS ET COMPLEMENTS

### 1) LES FLUX DES CHAMPS MAGNETIQUES

On considère deux noyaux ferromagnétiques de section  $S$  sur lequel on a aménagé  $n_1$  tours de fil sur une longueur  $l$  constituant le circuit "primaire" du dispositif et  $n_2$  tours de fil sur une longueur  $l$  constituant le circuit "secondaire" (figure 1).



Si la perméabilité magnétique  $\mu_r$  du milieu est bien définie, les flux sont proportionnels aux courants  $i_1$  et  $i_2$ . Les coefficients de proportionnalité sont la self primaire  $L_1$ , la self du secondaire  $L_2$  et la mutuelle inductance  $M$  entre les deux circuits. On dresse donc le tableau des flux suivant :

	flux au primaire	flux au secondaire
Seul circule le courant primaire $i_1$	$_{11} = L_1 i_1$	$_{12} = M i_1$
Seul circule le courant du secondaire $i_2$	$_{21} = M i_2$	$_{22} = L_2 i_2$
Les deux courants $i_1$ et $i_2$ circulent	$_{1 \text{ tot}} = \quad _{11} + \quad _{21}$	$_{2 \text{ tot}} = \quad _{22} + \quad _{12}$

### 2) LES FUITES DE FLUX

Dans le flux du primaire  $_{11}$  on peut distinguer deux parties (figure 2) :

- l'une  $_{11}'$  qui correspond aux lignes de champ communes aux deux circuits
- l'autre  $f_1$  correspondant aux lignes de champ qui traversent seulement le primaire sans passer par le secondaire.

La même distinction peut être faite au niveau du flux  $_{22}$  avec deux composantes :  $_{22}'$  et  $f_2$ .

Finalement, seules les parties  $_{11}'$  et  $_{22}'$  des flux propres  $_{11}$  et  $_{22}$  correspondent au couplage alors que  $f_1$  et  $f_2$  sont des flux de fuite.

Remarque : un transformateur à air a des fuites généralement prépondérantes et les flux couplés sont faibles. Par contre, un transformateur à circuit ferromagnétique possède des fuites faibles et le couplage est "serré".

### 3) COEFFICIENT DE COUPLAGE $k$

Pour caractériser l'importance du couplage entre 1° et 2°, on est amené à introduire le coefficient de couplage  $k$  qui est par définition :

On a toujours  $k < 1$  en effet  $k = 1$  est évidemment un cas idéal impossible à atteindre car il y a toujours des fuites.

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

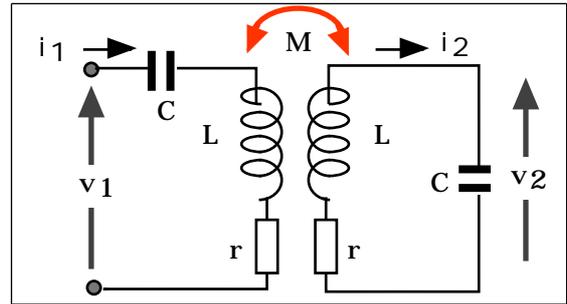
**2° PARTIE : CIRCUITS COUPLES IDENTIQUES ET ACCORDES SUR LA MEME FREQUENCE**

**But** : réaliser un filtre de bande nettement meilleur que celui obtenu avec un circuit RLC seul.

**1) MISE EN EQUATION**

On considère deux circuits RLC séries identiques, couplés par mutuelle inductance  $M$ , excités au primaire par un générateur de tension sinusoïdal  $v_1$  et tels que :

$$L C \omega_0^2 = 1 \quad Q = \frac{L \omega_0}{r} \quad k = \frac{M}{L}$$



Le coefficient de couplage  $k$  inférieur à 1, est rendu variable par modification de la distance entre primaire et secondaire (par exemple).

On se propose de chercher l'expression de la fonction de transfert  $A = v_2 / v_1$  au voisinage de la fréquence de résonance  $f_0$ . La mise en équation du circuit conduit aux relations suivantes :

$$v_1 = Z i_1 + j \omega M i_2 \dots (1)$$

$$0 = Z i_2 + j \omega M i_1 \dots (2)$$

$$v_2 = \frac{i_2}{j \omega C} \dots (3)$$

on trouvera facilement :

$$A = \frac{v_2}{v_1} = - \frac{M/C}{Z^2 + \omega^2 M^2}$$

Ensuite les circuits fonctionnant toujours au voisinage de  $f_0$ , on peut utiliser la valeur approchée de leur impédance (voir cours circuit RLC) :  $Z = r(1 + 2jQ\delta)$  avec  $\delta = (f-f_0)/f_0$

Pour simplifier l'écriture, on posera même :  $h = 2Q$  nouvelle variable fréquence et on obtient :

$$A = \frac{v_2}{v_1} = - \frac{M/C}{r^2 (1 + j h)^2 + \omega_0^2 M^2}$$

En effet, au voisinage de  $f_0$ , on peut faire l'approximation habituelle :  $\omega_0^2 M^2 \approx r^2$

On pose habituellement par définition l'indice de couplage  $n$ , nouvelle variable commode qui caractérise le couplage et dont la signification physique est simple, en effet on montre facilement que :

$$n = \frac{\omega_0 M}{r} = k Q = \left\{ \frac{v_2 \text{ à vide}}{v_1} \right\} \text{ à la résonance } f_0$$

**Enfinement on obtient :**

$$\frac{v_2}{v_1} = - \frac{n Q}{(1 + n^2 - h^2) + j 2 h}$$

**$Q$  : coefficient de qualité des circuits couplés RLC série**

**$h = 2 C \delta$  variable fréquence**

**$n = \omega_0 M/r$  : paramètre caractéristique du couplage entre les circuits**

## 2) ETUDE DE LA REPONSE EN FREQUENCE

Le module de la fonction de transfert au voisinage de la fréquence de résonance  $f_0$  est donné ci-dessous :

$$|A| = \left| \frac{v_2}{v_1} \right| = \frac{n Q}{\sqrt{(1 + n^2 - h^2)^2 + 4 h^2}}$$

### 2.1) RECHERCHE DES EXTREMUMS DE LA FONCTION DE TRANSFERT

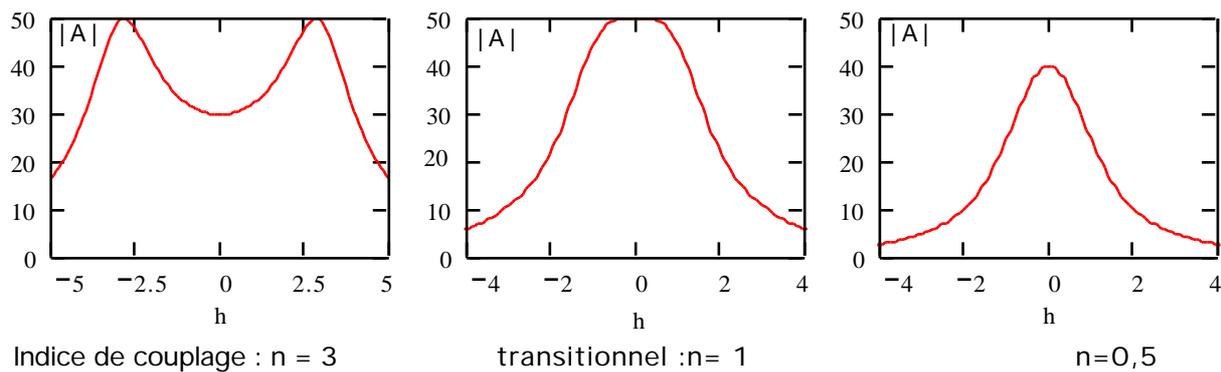
En dérivant l'expression de  $|A|$  par rapport à la variable  $h$ , on trouvera facilement deux solutions :

- $h = 0$  c'est à dire  $f = f_0$  correspondant au minimum central
- Les maximums latéraux symétriques par rapport minimal central et tels que :

$$h = \pm \sqrt{n^2 - 1} \quad \text{Y} \quad f_1, f_2 = f_0 \pm \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2 Q} \quad \text{ces maximums ne peuvent exister que pour } n > 1$$

Il y a donc une valeur particulière du couplage correspondant à  $n = 1$  dit "couplage transitionnel" en dessous de laquelle les maximums latéraux disparaissent.

Pour  $n < 1$ , il n'y a plus que la solution  $h = 0$  qui est alors devenu un maximum central unique. Finalement les graphes suivants résument les résultats obtenus pour un coefficient de qualité  $Q = 100$



On voit que pour le couplage transitionnel, la confusion des trois extrêmes fournit une courbe à maximum très plat, puis à chute rapide donc un bon filtre passe-bande. Plus le couplage  $n$  augmente, plus les résonances sont aiguës et plus elles s'écartent de la fréquence propre  $f_0$  des circuits RLC séries.

### 2.2) ETUDE DE L'ORDONNEE DE L'EXTREMUM CENTRAL EN FONCTION DU COUPLAGE

Qualitativement, ce qui précède montre qu'il passe par un maximum pour  $n = 1$ .

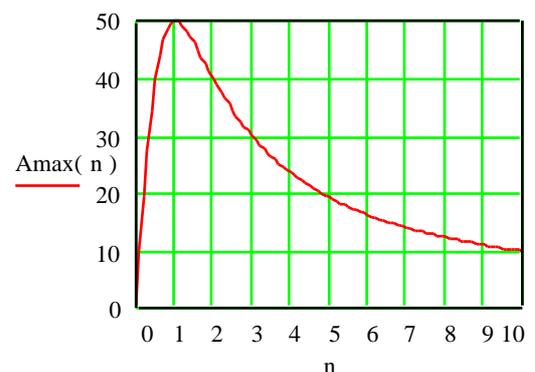
Ceci se retrouve facilement sur l'expression de  $|A|_{\max}$  pour  $h$  nul :

$$A_{\max} = \frac{n Q}{1 + n^2}$$

On voit que  $A_{\max}$  passe par un maximum au moment où les 3 extrêmes se confondent.

On dit que c'est le maximum maximorum !

Sa valeur est alors  $Q/2$  c'est à dire la moitié de ce que l'on obtient avec un circuit résonant RLC unique.



### 3) ETUDE DES ORDONNES DES MAXIMUM LATéraux

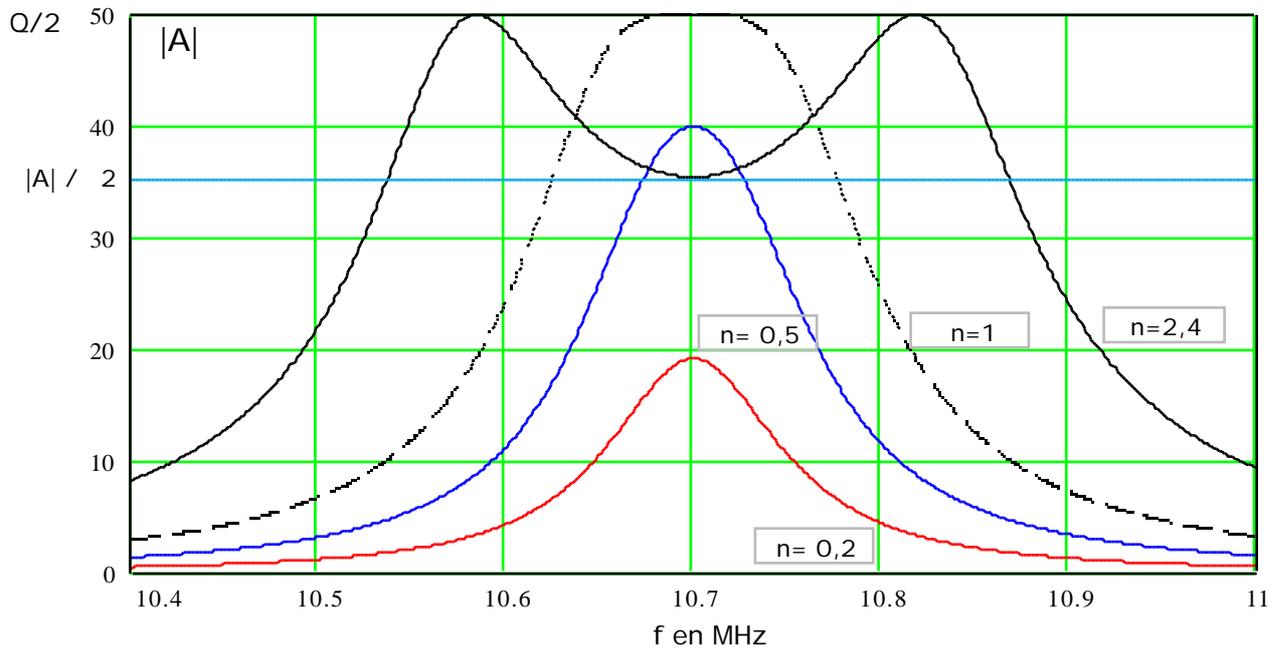
On trouvera sans difficultés qu'elles sont constantes et correspondent à deux résonances successives sur des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  différentes des fréquences propres  $f_0$  et qui sont toujours de part et d'autre.

$$|A_1| = |A_2| = \frac{Q}{2} = A_{\max}$$

### 4) EXEMPLE D'UN CIRCUIT COUPLE DESTINE AU TRAITEMENT D'UN SIGNAL RADIO F.M

$$f_0 = 10,7 \text{ MHz}, C = 220 \text{ pF}, L = 1 \text{ } \mu\text{H}, r = 0,68 \text{ et } Q = 100$$

La figure ci-dessous présente les courbes de réponses obtenues pour un indice de couplage  $n$  variant de 0,2 à 2,4.



La bande passante  $\Delta f$  du filtre de bande est alors égale à 151 KHz pour le couplage transitionnel  $n=1$ . Cependant il est possible de choisir  $n = 1 + \sqrt{2}$  de manière à obtenir  $\Delta f = 347$  KHz correspondant à un gain  $|A|$  compris entre  $|A|_{\max}$  et  $|A| / \sqrt{2}$ .

Un circuit RLC simple donnerait seulement :  $\Delta f = 107$  KHz.

### CONCLUSION

On voit que l'obtention d'un filtre de bande demande un couplage transitionnel ( $n=1$ ) ou un peu au-dessus, soit, compte tenu des valeurs courantes de  $Q$ , un coefficient de couplage d'environ quelques 1%.

On obtient ainsi une courbe de réponse relativement rectangulaire s'approchant d'un filtre de bande parfait. Ceci est nécessaire en Radio, Télécommunications... Traitement du signal et ce type de circuit y est fréquemment utilisé.

En pratique, il est difficile de réaliser des circuits parfaitement identiques, et bien accordés sur la même fréquence. Ceci n'est d'ailleurs pas absolument indispensable pour obtenir la courbe de réponse cherchée. Seule la mise au point expérimentale permet d'obtenir les résultats demandés en faisant notamment varier légèrement les selfs primaires et(ou) secondaires par modification de la position du milieu ferromagnétique lié au bobinage (voir étages à fréquence intermédiaire des postes de radio).

**MODULE de  $A = F[h = 2 Q \delta, n = k Q]$**

