



CALCUL DIFFÉRENTIEL (INTRODUCTION)

ET

APPLICATIONS EN PHYSIQUE

$$\int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{t}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$d\mathcal{E} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}\right) dz$$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = -\vec{\nabla} E_p$$

Vinh-Thuy NGUYEN

Élève-Ingénieur

Promotion 2003

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE TECHNIQUES AVANCÉES



**CALCUL DIFFÉRENTIEL (INTRODUCTION)
ET APPLICATIONS EN PHYSIQUE**

Vinh-Thuy NGUYEN*

Promotion 2003

Élève-Ingénieur

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE TECHNIQUES AVANCÉES

*vnguyen@ensta.fr

Calcul Différentiel (Introduction) et Applications en Physique

Table des matières

1	Notions de dérivée et de différentielle	3
1.1	Rappels	3
1.1.1	Définitions	3
1.1.2	Interprétation géométrique	3
1.1.3	Équation de l'application tangente	4
1.2	Corollaire : une autre définition de la dérivation	4
1.3	Approximation affine et Développements limités	6
1.3.1	Approximation affine	6
1.3.2	Exemples	6
1.3.3	Développements limités	8
1.4	Différentielle d'une fonction en un point	10
1.4.1	Approche intuitive	11
1.4.2	La différentielle	12
1.4.3	Quelques propriétés liées à la différentielle	14
1.4.4	Cas des fonctions de plusieurs variables	14
2	Applications en Physique	19
2.1	Calculs d'erreur	19
2.1.1	Utilisation de la différentielle	19
2.1.2	Majoration de l'erreur	19
2.2	Un opérateur différentiel : le gradient	20
2.2.1	Approche intuitive	20
2.2.2	Définition	20
2.2.3	Interprétation physique	21

Calcul Différentiel (Introduction) et Applications en Physique

1 Notions de dérivée et de différentielle

La première section introduit les notions de base sur le critère de *dérivabilité* (déjà vu), les conséquences (*approximation affine*), et la généralisation qui aboutit à la théorie des *Développements Limités*. Dans la suite, on introduit la notion de différentielle beaucoup plus maniable, surtout lorsque l'on a affaire à des fonctions de plusieurs variables : on généralise ainsi la notion de dérivabilité par celle de la *différentiabilité*.

1.1 Rappels

1.1.1 Définitions

Définition 1 (dérivabilité [1]). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $x_0 \in I$ un réel. Soit un réel h non nul tel que $x_0 + h \in \mathbb{R}$.

Si la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite **finie** lorsque h tend vers 0, autrement dit, s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, alors on dit que f est dérivable en x_0 et on appelle $l = f'(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0 .

Une variante de cette définition On peut donner une définition équivalente de la dérivabilité par changement de variables.

En effet, en posant $h = x - x_0$, la condition de dérivabilité s'écrit alors : f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 .

En résumé, f est dérivable si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :

$$l = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ainsi, associer à chaque point x_0 , ou plus généralement chaque point x de l'intervalle ouvert I où f y est dérivable, c'est se définir implicitement une fonction que l'on appelle fonction dérivée et que l'on note f' (ne pas confondre toutefois f' qui est une fonction et $f'(x)$ qui est un nombre !).

1.1.2 Interprétation géométrique

À partir de cette définition, on est en mesure de donner une interprétation graphique en remarquant que, pour un réel $x \neq x_0$ donné, le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ n'est autre chose que le coefficient directeur

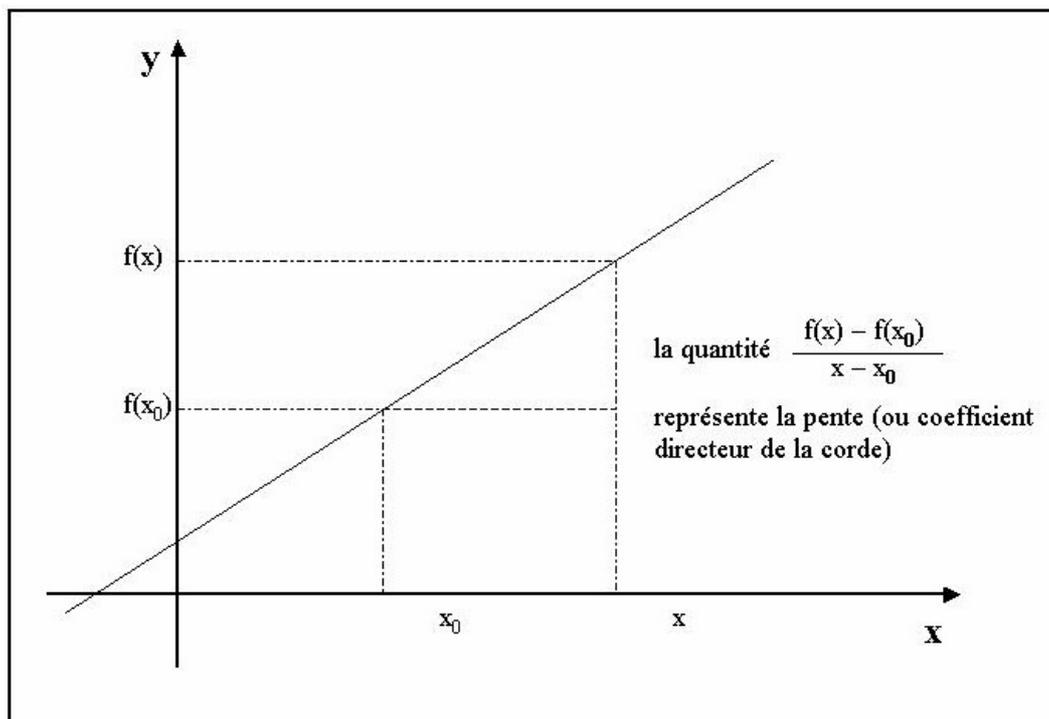


FIG. 1 – Pente d’une corde

de la corde reliant deux points de la courbe représentative \mathcal{C}_f de f d’abscisses respectives x et x_0 . En faisant tendre x vers x_0 , on se rend compte que la corde tend de plus en plus vers une “corde limite”, qui est en fait la droite tangente à \mathcal{C}_f au point x_0 . Le nombre dérivé, s’il existe, est alors le coefficient directeur de la tangente du graphe de f au point x_0 , ou, ce qui revient au même, la tangente de l’angle que forme la droite tangente avec l’axe des abscisses.

1.1.3 Équation de l’application tangente

La droite tangente à \mathcal{C}_f en x_0 est de la forme $y = mx + p$, avec par définition $m = f'(x_0)$. Pour déterminer p , il suffit de remarquer que la tangente passe par le point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$, point qui vérifie ainsi l’équation. En réinjectant dans l’équation de la droite, on obtient p . L’équation de la tangente est donc :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

1.2 Corollaire : une autre définition de la dérivation

Définition 2 (dérivabilité [2]). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $x_0 \in I$ un réel. On dit que f est dérivable au point x_0 s’il existe un réel l tel que l’on puisse écrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + l \cdot h + h \cdot \varphi(h)$$

avec $\varphi(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. l est alors par définition le nombre dérivé de f en x_0 , que l’on note $f'(x_0)$.

On peut démontrer que le nombre dérivé ainsi défini est le même que celui de la définition 1, c’est-à-dire qu’il y a bien équivalence entre les deux définitions, mais ce n’est pas l’objet de ce rappel de mathématiques ;

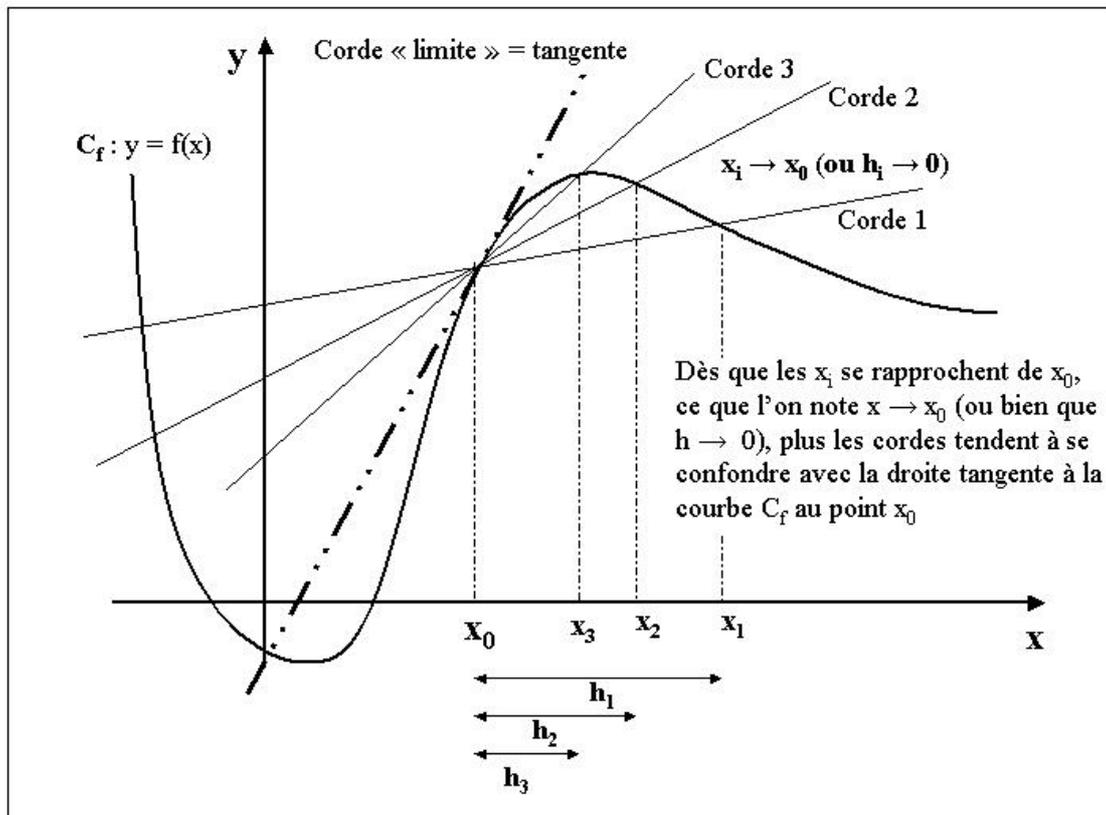


FIG. 2 – Famille de cordes et “droite limite”

néanmoins, on peut facilement comprendre pourquoi cette définition est bien équivalente à l'autre : en faisant passer le terme $f(x_0)$ à gauche et en divisant le tout par h , on obtient alors :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l + \varphi(h)$$

Tout se passe donc comme si l'on avait substitué le symbole "lim" par un terme $\varphi(h)$ qui mesure l'écart -ou l'erreur- entre le coefficient directeur de la corde quelconque et le coefficient directeur de la "corde limite" (*i.e.* la tangente, coefficient directeur qui est le nombre dérivé par définition). Cet écart se réduit significativement dès que h est suffisamment proche de 0.

On peut évidemment reprendre tout ça en travaillant avec la variable $x - x_0$, on aurait alors eu :

$$f(x) = f(x_0) + l.(x - x_0) + (x - x_0).\varphi(x - x_0)$$

Ce n'est évidemment qu'un artifice d'écriture !

1.3 Approximation affine et Développements limités

Une des conséquences les plus importantes qui découlent de la deuxième définition que l'on a donnée de la dérivation est ce que l'on appelle l'approximation affine, et sa généralisation, qui aboutit à la théorie des Développements Limités, très utilisés dans les domaines tels que la Physique, la Chimie ou les Statistiques lorsqu'il est nécessaire de faire des approximations.

1.3.1 Approximation affine

Écrire, lorsque f est dérivable en x_0 que :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + (x - x_0).\varphi(x - x_0)$$

signifie, dans une "très large mesure" que l'on peut confondre, au voisinage de x_0 , f et sa tangente ou plutôt, pour être rigoureux, la courbe C_f et sa tangente. Se déplacer sur la courbe C_f ou se déplacer sur la tangente au voisinage de x_0 revient quasiment au même. En effet, le terme

$$f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

n'est autre que la tangente de C_f en x_0 . "très large mesure" car cette approximation de f par sa tangente en x_0 (au voisinage de x_0 **seulement** et pas ailleurs car il faudrait y considérer les autres tangentes !) ne se fait pas au détriment d'une certaine erreur, erreur mesurée justement par le terme en $(x - x_0).\varphi(x - x_0)$. Néanmoins, cette approximation devient très justifiée quand x est infiniment proche de x_0 car l'erreur est alors de l'ordre de $(x - x_0)^2$ ce qui est assez négligeable devant les autres termes quand $(x - x_0)$ est suffisamment petit devant 1.

Ainsi, on a approximé f par sa tangente au voisinage de x_0 , droite qui est une fonction affine par définition : on comprend alors aisément d'où vient le nom.

1.3.2 Exemples

En faisant ainsi des approximations affines, lorsqu'elles sont justifiées, on peut faire des calculs beaucoup plus rapidement ou alléger des expressions parfois trop lourdes. En voici quelques exemples :

Au voisinage de 0, on a $f(x) = \frac{1}{1-x} \sim 1 + x$ car $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, aussi, pour calculer $\frac{1}{0,999} = \frac{1}{1-0,001} = f(0,001)$, inutile de se casser la tête, cela fait $1 + 0,001 = 1,001$ à peu près ! Et si vous n'êtes

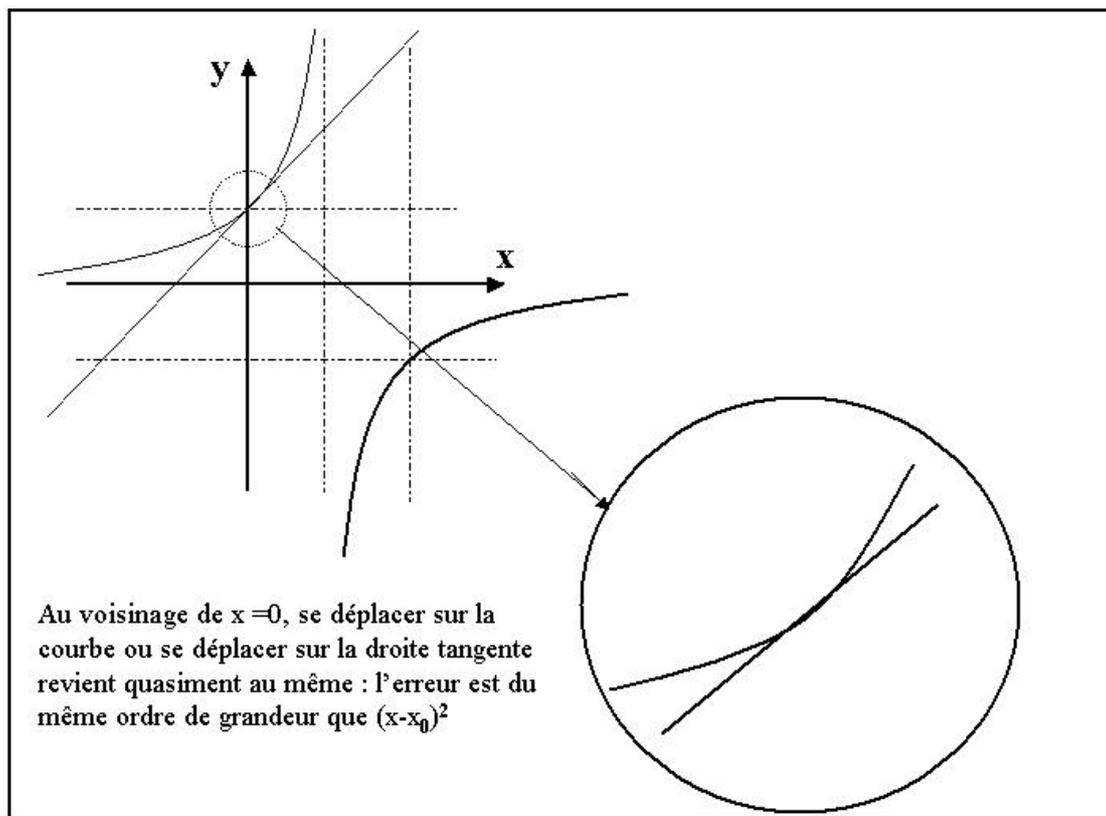


FIG. 3 – Un exemple d'approximation affine de $x \mapsto \frac{1}{1-x} \sim 1+x$

pas convaincus, vérifiez-le sur la calculatrice ! Remarquer évidemment que cela ne marche pas si l'on généralise avec des accroissements trop grands : $\frac{1}{1-10} \neq 1 + 10$! L'approximation affine garde un caractère local.

Voici quelques approximations affines usuelles :

- $\frac{1}{1+x} \sim 1 - x$ (il suffit de changer x en $-x$)
- $\frac{1}{1-x^2} \sim 1 + x^2$ (pareil, on change x en x^2)
- $\ln(1+x) \sim x$
- $\sin x \sim x$
- $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha \cdot x$ (avec α un réel quelconque)

Rq : On a évidemment fait des approximations affines au voisinage de 0. Il est important aussi de se rappeler que toutes ces propriétés gardent un **caractère local**.

1.3.3 Développements limités

Pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? En effet, on sait approximer désormais une fonction, lorsqu'elle est dérivable, par sa tangente, ce qui constitue une bonne approximation affine. Mais on peut se poser la question de savoir si l'on peut "affiner" la précision de notre approximation. De plus en faisant une approximation affine, on confond une fonction parfois complexe par une fonction affine *i.e.* un polynôme du premier degré extrêmement simple puisqu'un polynôme ne fait intervenir que des additions et des multiplications (l'intérêt se situe d'un point de vue algorithmique) ! Aussi, peut-on aller plus loin en approximant notre fonction f par un polynôme de degré quelconque et ne plus se contenter du simple degré 1 ? Quelles sont alors les hypothèses que l'on doit faire sur f ?

Toutes ces questions trouvent leur réponse dans la **Théorie des Développements Limités**, théorie mathématique très intéressante mais dont il ne sera donné ici que des résultats importants. Un autre chapitre sera éventuellement consacré aux Développements Limités.

Définition 3 (Développement limité). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et $x_0 \in I$.

On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme de degré n tel que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

Le dernier terme qui se lit "un petit o de $(x - x_0)^n$ " signifie que ce terme est négligeable devant les autres termes ; il suffit de généraliser la définition vue plus haut de l'approximation affine : ainsi $o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n \varphi(x - x_0)$ où $\varphi(x - x_0)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow x_0$ (typiquement, il est de l'ordre de $(x - x_0)^{n+\alpha}$ ($\alpha > 0$), en général $(x - x_0)^{n+1}$, et donc, encore plus négligeable devant les autres termes -ainsi $0,0001^4$ est négligeable devant $0,0001^3$, $0,0001^2$ et $0,0001$). On obtient alors une précision de l'ordre de $(x - x_0)^{n+1}$.

Interprétation

L'écriture

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

s'interprète de la manière suivante : les termes successifs de la somme nous donnent une information de plus en plus fine et précise sur le comportement de f au voisinage de x_0 . On a en effet déjà déduit de l'écriture

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o((x - x_0))$$

lorsque f est dérivable, que, au voisinage de x_0 , $f(x)$ est proche de $f(x_0)$ mais encore plus proche de $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Ainsi, lorsqu'on rajoute un terme d'ordre supérieur à chaque cran, la différence est négligeable devant une fonction qui tend encore plus vite vers 0. C'est ce qu'on appelle faire un développement limité.

Cas des fonctions de classe C^n (n fois dérivables)

Dans le cas des fonctions n -fois dérivables, un théorème nous assure qu'elles admettent un développement limité (car encore faudrait-il le trouver ce polynôme qui approche si bien notre fonction f !) et ce théorème nous fournit même les coefficients de notre polynôme :

Théorème 1. Soit f une fonction réelle d'un intervalle ouvert I dans \mathbb{R} et soit $x_0 \in I$. Si f est C^n sur I , alors f admet un développement limité à l'ordre n et l'on a pour tout $x_0 \in I$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Pour les initiés, il s'agit du développement de *Taylor-Young* à l'ordre n . Pour les autres, il suffit de calculer les dérivées k -ième puis les évaluer en x_0 pour obtenir, à un facteur $k!$ près, les coefficients de notre polynôme approximateur.

Remarques fondamentales

- La réciproque est fautive : une fonction admettant un développement limité à l'ordre n n'est pas nécessairement dérivable n fois. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer comme contre-exemple la fonction :

$$f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Il s'agit, à chaque fois, dans les écritures vues plus haut, de **vraies égalités** : soit on écrit l'égalité jusqu'au bout en gardant le " $o(x^n)$ ", soit on dit qu'on passe à la limite et on écrit " \simeq ".
 $\sin x = x + o(x^2)$ mais $\sin x \simeq x$ quand $x \rightarrow 0$.
- Une approximation affine, c'est un développement limité à l'ordre 1...

Exemples de développements limités

La plupart des fonctions ci-dessous sont définies, continues et dérivables en 0 une infinité de fois : elles admettent donc un développement limité à tout ordre en 0. Il suffit alors de "tronquer" le développement à l'ordre voulu.

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + o(x^n)$

→ On reconnaît en effet une série géométrique qui vaut $\frac{1-x^n}{1-x} \simeq \frac{1}{1-x}$ en négligeant x^n devant 1.

- $(1+x)^\alpha = 1 + x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$
→ Important car la plupart des autres développements limités usuels se déduisent de celui-ci par composition. On rappelle également que α est réel.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
→ Ce développement est également très courant.
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

On peut évidemment retrouver ces développements par calculs successifs des dérivées puis évaluations en un point donné, mais cela prend parfois beaucoup de temps : il vaut donc mieux les connaître par coeur si possible.

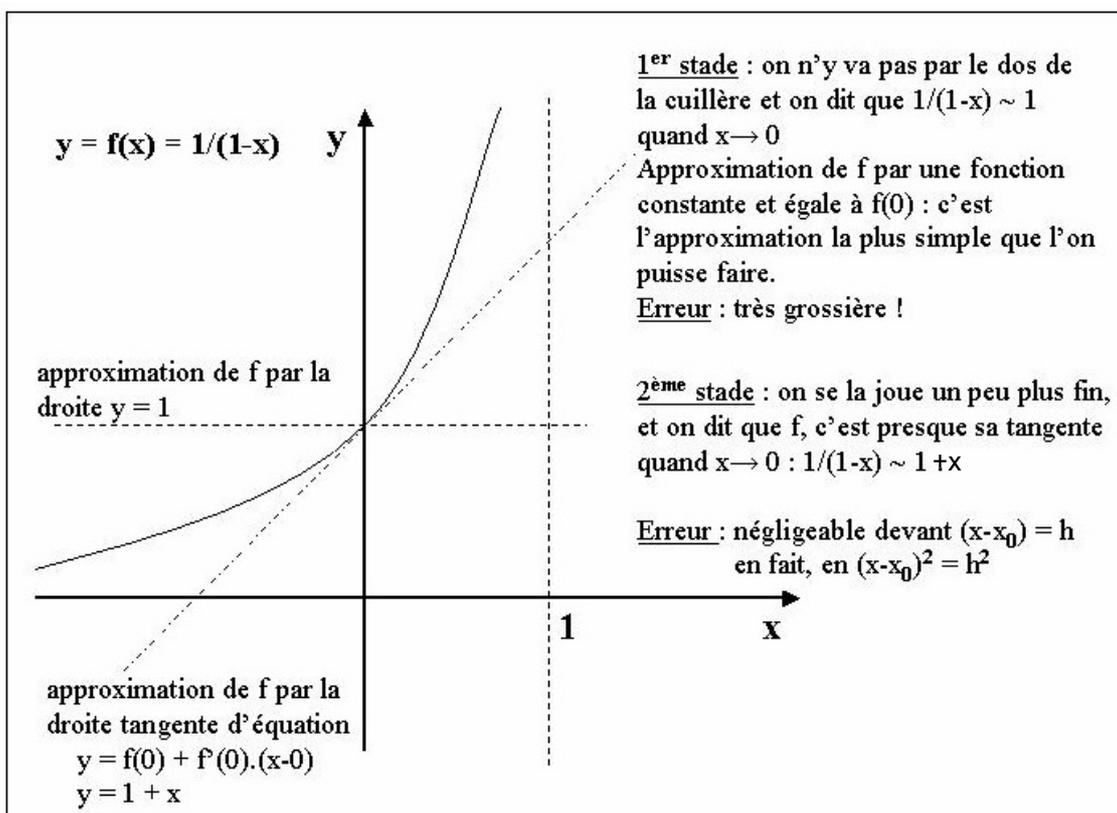


FIG. 4 – Développements limités à l'ordre 0 et 1

1.4 Différentielle d'une fonction en un point

Maintenant que les notions de dérivabilité et de développement limité ont été présentées, il convient de se réfléchir sur le problème suivant : en physique, nous rencontrons souvent des fonctions qui ne dépendent plus d'une seule variable, mais deux, trois et voire, même très souvent, plusieurs. On comprend dès lors que la

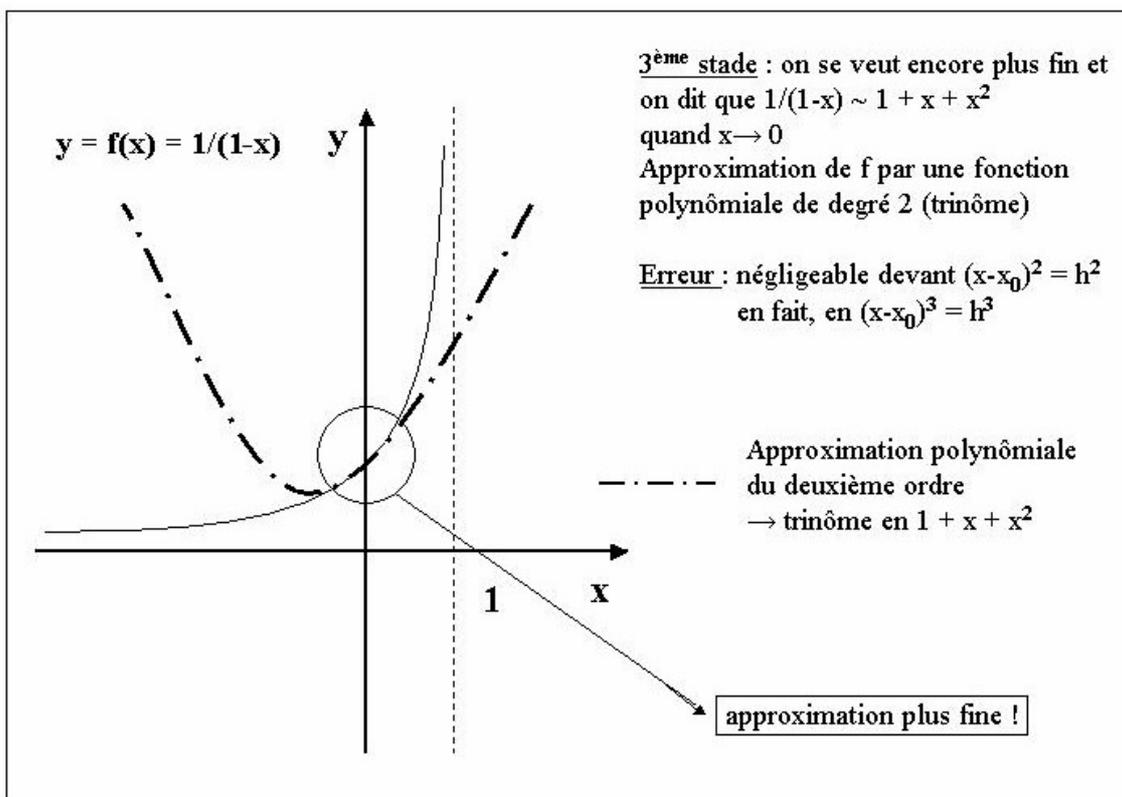


FIG. 5 – Développement limité à l'ordre 2

notion de dérivabilité est inutilisable. Il s'agit donc de présenter maintenant un autre critère qui englobe celui de la dérivabilité et la généralise, et une autre grandeur qui généralise celle de la dérivée.

1.4.1 Approche intuitive

Éléments différentiels ou infinitésimaux

Supposons une variable x réelle susceptible de varier dans \mathbb{R} . Si x varie infiniment peu, x passe de la valeur x à la valeur $x + dx$ infiniment proche de x . Ainsi, " dx " apparaît comme un élément infiniment petit devant x , tellement petit qu'on peut à la rigueur le supposer négligeable devant tout, mais assez grand cependant pour ne pas le considérer comme nul. On dit que dx est un élément différentiel.

Différentielle d'une fonction d'une seule variable / Notation différentielle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un ouvert I de \mathbb{R} et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si l'on considère un point x_0 de I et que l'on se déplace sur la courbe \mathcal{C}_f de sorte à arriver en un point d'abscisse x infiniment proche de x_0 tel que $x = x_0 + dx$; sachant que f est dérivable par hypothèses, on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) dx + o(dx)$$

Or, comme l'on s'est déplacé infiniment peu sur le graphe, l'ordonnée aura, elle aussi, également peu varié, ce que l'on peut écrire :

$$f(x_0 + dx) \simeq f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + df$$

par commodité d'écriture, on a confondu $df(x_0)$ et df .

Ainsi, on obtient :

$$f(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0) dx + o(dx)$$

d'où, en faisant tendre dx vers 0 :

$$\frac{df}{dx} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Ceci explique pourquoi on note souvent la dérivée sous cette forme différentielle en physique et non pas sous forme fonctionnelle comme il est d'usage en mathématiques classiques.

Quelques remarques fondamentales

- Tout d'abord la notation différentielle, fait ressortir un sens beaucoup plus physique à la notion de dérivée. En effet, une dérivation qui est une opération complexe consistant en un passage à la limite d'un taux d'accroissement, se réduit ici formidablement, grâce à cette notation différentielle, à un simple quotient de deux éléments infiniment petits :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0)$$

- Géométriquement, on comprend aussi très facilement pourquoi le nombre dérivé représente la pente, ou la tangente de l'angle formé par la droite tangente et l'axe des abscisses : dans le petit triangle rectangle de côtés dx et df (ou dy), le rapport $\frac{dy}{dx}$ représente bien $\tan \alpha$.
- La dérivation, quand il y a composition, perd de son caractère "paranormal" : avant, on écrivait $(g \circ f)'(t) = g'[f(t)] \times f'(t)$, maintenant on écrit le rapport $\frac{dg}{df}$ que l'on multiplie et que l'on divise par df : $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \times \frac{df}{dx} = g'[f(t)] \times f'(t)$. Qui a dit magique ?
- La notation différentielle est bien pratique, mais cela ne reste qu'une **notation**.
- Enfin, une chose que l'on a passée sous silence est le fait que l'on a utilisé f comme une pure variable ne dépendant **à priori** ni de x ni de quoi que ce soit. Or, il faut savoir que pour le mathématicien, la quantité $f(x)$ qui varie, certes, quand x varie, est fondamentalement différente de f , qui est une fonction : ces deux objets mathématiques n'ont rien de commun si ce n'est les mêmes lettres !

Mais alors, pourquoi donc faire cette confusion entre f la fonction et f la variable en physique ? Parce que pour le physicien, une grandeur physique telle que la pression d'un gaz par exemple, reste la pression, indépendamment des paramètres dont elle dépend, que ce soit le volume ou la température ! Ainsi, en physique, la notion de "fonction" conserve un sens limité et toute grandeur n'est traitée qu'en tant que variable.

1.4.2 La différentielle

Rappelons tout d'abord ce qu'est une application linéaire :

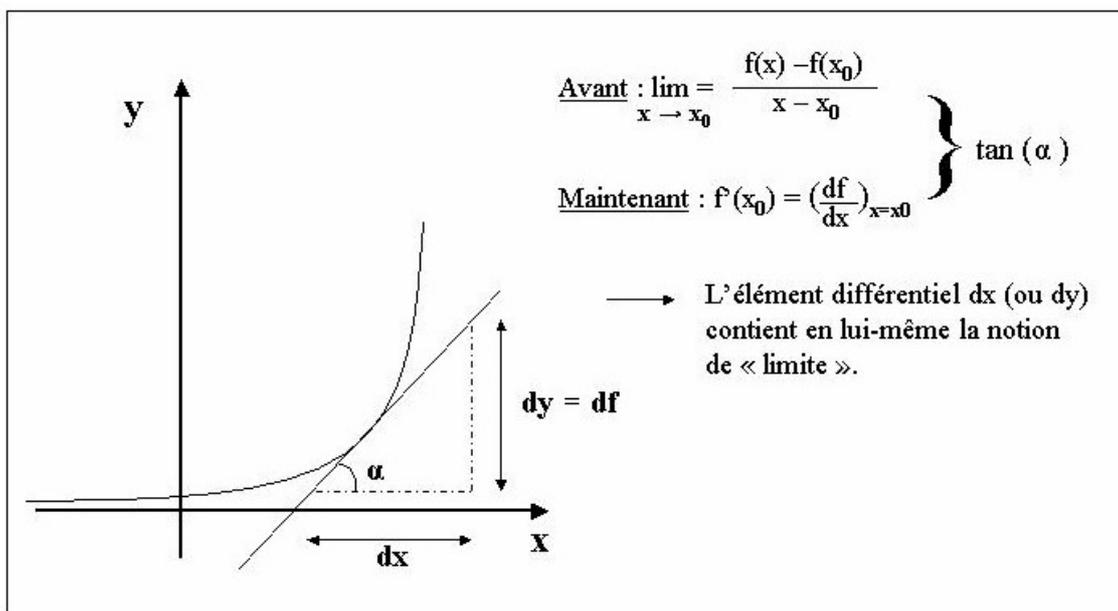


FIG. 6 – La différentielle et la notation différentielle

Définition 4 (Application linéaire). Si E et F sont deux espaces vectoriels¹ à valeurs dans un corps \mathbb{K} (\mathbb{C} ou \mathbb{R}). On dit qu'une application u de E dans F est **linéaire** si et ssi l'image de toute combinaison linéaire d'éléments est combinaison linéaire des images des éléments et que l'image du vecteur nul est le vecteur nul.

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in E^2 \\ u(\lambda.x + \mu.y) &= \lambda.u(x) + \mu.u(y) \\ u(0_E) &= 0_F \end{aligned}$$

Théorème 2 (Différentielle en un point). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un ouvert I de \mathbb{R} et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une **unique** application **linéaire** de u de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que pour tout $dx \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + u(dx) + o(dx)$$

Cette application linéaire est appelée différentielle² de f au point x_0 et se note $df(x_0)$.

PREUVE : la preuve est complexe ; le lecteur, s'il désire approfondir ses connaissances sur ce sujet (il le devra de toute manière s'il est, ou amené à être élève en classes préparatoires scientifiques puisque cela fait

¹Un espace vectoriel E muni des lois $+$ et \cdot (où $+$ est une loi de composition interne et \cdot une loi de composition externe) est un \mathbb{K} -espace vectoriel -ou espace vectoriel à valeur dans un corps \mathbb{K} - si $(E, +, \cdot)$ est un groupe abélien relativement à la loi $+$ et que toute combinaison linéaire d'éléments de E est dans E : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall (x, y) \in E$, $\lambda.x + \mu.y \in E$.

²Il ne faut pas que le lecteur soit déstabilisé s'il lui arrive de rencontrer des personnes ou des auteurs qui parlent de "dérivée" au lieu de différentielle. En fait, s'il est vrai que l'on utilise le mot "dérivée" pour désigner la fonction dérivée, ou, ce qui revient au même, le nombre dérivé, cette raison est purement historique puisque c'est comme cela qu'elle a été découverte et formalisée. Les découvertes et la généralisation de la théorie qui englobent aussi le cas des fonctions de plusieurs variables ont fait que la notion de différentielle est la seule qui soit vraiment importante. Dès lors, par abus de langage, certains parlent de dérivée ou *dérivée totale* d'une fonction au lieu de différentielle, de la même façon qu'il conserve dans le vocabulaire la notion de "dérivabilité" au lieu de "différentiabilité".

L'important, c'est de comprendre que dans le cas d'une fonction d'une seule variable (voir *Remarque 1*), au lieu de considérer l'application linéaire tangente (u) en entier, il est plus facile de ne considérer que le nombre dérivé, c'est-à-dire le coefficient directeur, car, en pratique, une application linéaire en dimension 1 de la forme $x \mapsto a.x$ est entièrement déterminée par le coefficient a , alors que ce n'est plus le cas en dimension 2 ou plus, puisque seule la notion de différentielle est alors utile et valable.

partie du programme de *Mathématiques Supérieures*), consulter un ouvrage de mathématiques.

Remarque 1 :

Nous avons vu que lorsque f était dérivable en x_0 , on pouvait écrire $f(x_0+dx) = f(x_0) + \frac{df}{dx} dx + o(dx) = f(x_0) + df + o(dx)$. L'application

$$df : dx \mapsto \left(\frac{df}{dx}\right)_{|x=x_0} dx = f'(x_0) dx$$

est bien linéaire puisque proportionnelle : on en déduit par unicité de la différentielle que c'est bien elle, et que décidément, df porte vraiment bien son nom ! (les choses ont été bien faites, et les objets, bien nommés...).

Remarque 2 :

En physique, exprimer la différentielle d'une grandeur f , cela revient à **exprimer une variation élémentaire de f en fonction des variations élémentaires des variables dont dépend f** . $df = f'(x_0).dx$ en est un exemple.

1.4.3 Quelques propriétés liées à la différentielle

Théorème 3 (Propriétés de base). Soient f et g deux fonctions d'une variable réelle x différentiables (qui admettent une différentielle : si une fonction d'une seule variable est dérivable, elle est aussi automatiquement différentiable), alors on a :

- $d(f + g) = df + dg$
- $d(f \times g) = df g + f dg$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df g - f dg}{g^2}$
- $d(\ln f) = \frac{df}{f}$

PREUVE :

- $d(f + g) = [f(x) + g(x)]' dx = [f'(x) + g'(x)] dx = df + dg$
- $d(f \times g) = [f(x) \times g(x)]' dx = [f'(x) g(x) + f(x) g'(x)] dx = df g + f dg$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' dx = \left[\frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}\right] dx = \frac{df g - f dg}{g^2}$ avec g ne s'annulant pas sur l'intervalle d'étude.
- $d(\ln f) = [\ln[f(x)]]' dx = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] dx = \frac{df}{f}$ On parle de différentielle logarithmique : très utilisée en Physique car elle mesure un écart relatif.

◇

On n'a rien appris de réellement nouveau car en fin de compte, ce ne sont que manipulations d'écriture mathématiques...Et l'on se demande pourquoi avoir inventé cette notion de différentielle alors que l'on s'en tirait très bien avec celle de la dérivée... ??? Eh bien, dans le cas des fonctions de plusieurs variables, la notion de dérivée perd de son sens et seule la notion de différentielle est encore exploitable.

1.4.4 Cas des fonctions de plusieurs variables

Il arrive parfois (et même très souvent !) qu'une grandeur dépende de plusieurs variables à la fois. Ainsi, en Physique, il n'est pas rare de devoir traiter des grandeurs, fonctions de plusieurs variables ; citons quelques exemples à titre d'illustration :

- En thermodynamique, la pression d'un gaz supposé parfait dépend du volume qu'il occupe, du nombre de moles contenues dans ce volume et de la température, relation de dépendance qui se traduit par la célèbre formule :

$$P = \frac{nRT}{V}$$

où R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$).

- En électromagnétisme, les champs électrique \vec{E} et \vec{B} dépendent dans le cas général, et du point de l'espace, et du temps, si bien que :

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$$

- En mécanique, l'énergie potentielle E_p associée à une force est aussi fonction du temps et de l'espace :

$$E_p = E_p(x, y, z, t)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \iff \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \delta W = -dE_p$$

Dès lors, on se rend bien compte que l'on ne peut plus parler de dérivée à proprement parler : dérivée par rapport à quelle variable ?

Un nouveau critère : la différentiabilité

Soit $f : I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un ouvert de \mathbb{R}^3 et soit $V_0 = (x_0, y_0, z_0) \in I$ un point de \mathbb{R}^3 ou un vecteur (c'est la même chose).

i.e. $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$. On se choisit ici une fonction de trois variables -c'est souvent le cas en physique, ne serait-ce par exemple, le cas d'une température qui dépend du lieu considéré, et donc des coordonnées (x,y,z)- mais on pourra généraliser au besoin... Le lecteur aura compris que traiter une fonction de n variables revient à étudier une fonction d'une seule variable vectorielle de taille n ...

On munit \mathbb{R}^3 de sa norme euclidienne usuelle : $\|V_0\|_2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

On ne peut plus parler de dérivabilité pour la fonction f , notion qui n'était vraie que dans le cas où l'on avait une fonction d'une seule variable. En revanche, la notion de différentielle reste toujours valable.

→ **La notion de différentiabilité dans le cas des fonctions de plusieurs variables est une généralisation de la notion de dérivabilité dans le cas classique des fonctions d'une seule variable.**

Il suffit donc, dès lors, de revenir à la définition initiale (définition/théorème 2) de la différentiabilité en la généralisant : existe-t-il une application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (on parle ici de forme linéaire -cf cours Maths Sup-) telle que pour tout vecteur $\vec{dV} = (dx, dy, dz)$, on ait :

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) = f(x_0, y_0, z_0) + u(dx, dy, dz) + \left\| \vec{dV} \right\|_2 |\varepsilon(\vec{dV})|$$

$$\iff f(\vec{V}_0 + \vec{dV}) = f(\vec{V}_0) + u(\vec{dV}) + \left\| \vec{dV} \right\|_2 |\varepsilon(\vec{dV})|$$

avec $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|\varepsilon(\vec{dV})| \rightarrow 0$ quand $\left\| \vec{dV} \right\|_2 \rightarrow 0$. (critère de *Fréchet-différentiabilité*) ?

On peut effectivement s'amuser à développer l'expression de $f(\vec{V}_0 + \vec{dV})$ et essayer de faire ressortir une partie linéaire en \vec{dV} , puis une partie quadratique (en terme de carré) négligeable en \vec{dV} . Mais cela est tout de même fastidieux, aussi nous allons donner des définitions équivalentes de la différentiabilité.

Dérivée partielle

On peut, lorsqu'une fonction dépend ainsi de plusieurs variables, définir des dérivées partielles comme étant des dérivées par rapport à une variable quand on maintient les autres constantes : on se ramène ainsi à un cas bien connu *i.e.* la dérivation de fonctions d'une seule variable.

Définition 5 (Dérivée partielle). Soit $f : I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un ouvert de \mathbb{R}^3 et soit $V_0 = (x_0, y_0, z_0) \in I$ un point de \mathbb{R}^3 .

On définit la dérivée partielle de f par rapport à x en x_0 et au point (x_0, y_0, z_0) , quand elle existe, la quantité notée $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}(x_0, y_0, z_0)$ avec y et z maintenus constants :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + dx, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{dx}$$

et de la même façon les dérivées partielles par rapport à y et z . On utilise le signe “ ∂ ” et non “ d ” car la dérivée est partielle.

Critère de différentiabilité

Il existe un théorème très puissant qui nous donne un critère équivalent de différentiabilité :

Théorème 4 (Différentiabilité). Soit $f : I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un ouvert de \mathbb{R}^3 et soit $V_0 = (x_0, y_0, z_0) \in I$ un point de \mathbb{R}^3 .

1. f est différentiable si et seulement si f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables et que ces dérivées partielles soient continues.
2. f est alors continue globalement par rapport à ses variables (la continuité par rapport à chaque variable prise séparément est insuffisante !!!) et on dit que f est C^1 .
3. La différentielle de f au point $\vec{V}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est alors l'application :

$$df_{|\vec{V}_0}(\vec{dV}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{V}_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{V}_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{V}_0) dz$$

Concrètement, cela veut dire qu'une variation infinitésimale de la grandeur f provient de variations infinitésimales des grandeurs x , y et z , pondérées par les valeurs des dérivées partielles en ce point. Par allègement des écritures et en généralisant pour x , y et z quelconques, on écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Remarques importantes

- Quand on écrit que $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$, en maintenant y et z constants, $dy = dz = 0$, et en divisant les deux membres de l'égalité par dx , on retrouve que :

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

En effet, f n'est alors plus fonction que de x , c'est pourquoi on retrouve la dérivée droite.

- Rappelons que f est considérée comme une variable :

$$d(\ln f) = \frac{df}{f}$$

Si f dépend par exemple d'une variable x , en divisant le tout par dx , il vient :

$$\frac{d \ln(f)}{dx} = \frac{df}{dx} \frac{1}{f} = \frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$$

et on retrouve la dérivée logarithmique : on est rassurés !

Fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles

Soit $\vec{f} : I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ où I est un ouvert de \mathbb{R}^3 et soit $V_0 = (x_0, y_0, z_0) \in I$ un point de \mathbb{R}^3 .

$$\vec{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que la fonction \vec{f} (fonction vectorielle) transforme un vecteur en un vecteur (contrairement à tout à l'heure où f transformait un vecteur en un nombre réel $f(x, y, z)$).

Pour étudier ce genre de fonctions vectorielles, on étudie séparément chaque composante de \vec{f} et on retombe sur le cas d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarques sur la composition

Nous allons, sans procéder à une écriture formelle mathématique, expliquer comment traiter les problèmes de composition de fonctions de plusieurs variables, et ce, en adoptant une écriture "à la physicienne". Rappelons en effet que mathématiquement, f la fonction et $f = f(x)$ la variable sont des objets mathématiques complètement différents...

On imagine une composition de la façon suivante :

$$(x, y, z) \longrightarrow [u(x, y, z); v(x, y, z)] \longrightarrow g(u, v)$$

Ainsi, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et on a $f = g \circ h$ avec :

$$\vec{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ avec } \vec{h}(x, y, z) = [h_1(x, y, z); h_2(x, y, z)] = [u(x, y, z); v(x, y, z)]$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } g : (u, v) \rightarrow g(u, v)$$

$$(x, y, z) \xrightarrow{\vec{h}} \begin{pmatrix} h_1(x, y, z) = u \\ h_2(x, y, z) = v \end{pmatrix} \xrightarrow{g} g(u, v)$$

$$(x, y, z) \xrightarrow{f} f(x, y, z)$$

Au final, $f(x, y, z) = g(u, v)$

Dans ce cas :

$$df = dg = \left[\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx + \left[\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dy + \left[\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right] dz$$

Pour les confirmés, il suffit de multiplier les deux matrices Jacobiennes de h et g et on obtient immédiatement le résultat...mais cela suppose que l'on ait défini la différentielle d'une composée : ceux qui voudront approfondir cette notion pourront se plonger dans des manuels de mathématiques (*Maths Sup / Spé ou DEUG*) mais on n'en aura guère l'utilité en Physique.

Exemples

→ Si l'on reprend l'équation d'état du gaz parfait, on a :

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$dP = d\left(\frac{nRT}{P}\right)$$

La plupart du temps, comme l'on considère des systèmes fermés, donc le nombre de moles gazeuses est supposé constant :

$$dP = nRd\left(\frac{T}{P}\right) = nR\frac{PdT - TdP}{P^2} = nR\left[\frac{1}{P}dT - \frac{T}{P^2}dP\right]$$

→ En chimie des solutions, le pH est défini comme :

$$pH = -\log[H_3O^+]$$

avec ici $\log x = \frac{\ln x}{\ln(10)}$ (logarithme en base 10 : $\log(10) = 1$ et $\log(10^n) = n$). On a affaire à une différentielle logarithmique :

$$d[pH] = -\frac{d[H_3O^+]}{[H_3O^+]} \times \frac{1}{\ln(10)}$$

On voit donc que la variation de pH est dûe à une variation **relative** sur la concentration en ions hydronium $[H_3O^+]$.

2 Applications en Physique

2.1 Calculs d'erreur

2.1.1 Utilisation de la différentielle

Il arrive souvent qu'en Physique (ou toute autre science où l'on effectue des mesures), l'on ait des incertitudes sur la fiabilité de nos instruments. Ou même, lorsque nous devons calculer numériquement une valeur de grandeur, il se peut qu'il existe des incertitudes relatives quant aux valeurs des paramètres dont dépend la grandeur en question. Comment alors évaluer cette incertitude ?

Les fabricants de matériels électroniques par exemple, nous fournissent des composantes mais ne peuvent nous assurer qu'une résistance donnée vaille 100Ω exactement. On rappelle la formule donnant la résistance électrique d'un matériau :

$$R = \frac{l}{\gamma S}$$

où l est la longueur de la tige, S la surface et γ la conductivité (en $\Omega^{-1}m^{-1}$). Or ces valeurs ne sont connues qu'avec une certaine marge d'erreur. Supposons alors que toutes ces valeurs ne soient connues qu'à 10 % près : avec quelle marge d'erreur aurons-nous R ?

→ Nous ne pouvons pas écrire naïvement :

$$\Delta R = \frac{\Delta l}{\Delta \gamma \Delta S}$$

car R ne varie pas forcément de manière linéaire avec chacun de ses paramètres à l'échelle globale.

En revanche, **à l'échelle locale, au voisinage des valeurs supposées exactes de l , S et γ** , R varie de façon quasi-linéaire. En effet, pour une fonction de plusieurs variables, la notion d'application linéaire tangente se généralise ; et de même que l'on avait fait une approximation affine dans le cas d'une fonction d'une seule variable, on fait ici une approximation de R par la **partie linéaire** de son développement limité.

$$dR = \frac{\gamma S dl - l S d\gamma - l \gamma dS}{(\gamma S)^2} = \frac{1}{\gamma S} dl - \frac{l}{\gamma^2 S} d\gamma + \frac{l}{\gamma S^2} dS$$

On voit donc qu'à l'échelle locale, l'erreur absolue dR varie de façon linéaire avec les erreurs absolues des paramètres dl , $d\gamma$ et dS .

2.1.2 Majoration de l'erreur

Il est alors possible de **majorer** ces erreurs absolues à l'échelle locale par leurs erreurs absolues à l'échelle globale :

$$|dR| \leq |\Delta R| \leq \left| \frac{1}{\gamma S} \Delta l - \frac{l}{\gamma^2 S} \Delta \gamma - \frac{l}{\gamma S^2} \Delta S \right|$$

Mais ici, on nous donne des erreurs relatives et non absolues, on utilise donc la différentielle logarithmique :

$$d(\ln R) = d\left[\ln\left(\frac{l}{\gamma S}\right)\right] = d(\ln l - \ln \gamma - \ln S) = \frac{dl}{l} - \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dS}{S}$$

on en déduit donc l'erreur relative sur la valeur de R calculée :

$$|dR| \leq |\Delta R| \leq \left| \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta \gamma}{\gamma} - \frac{\Delta S}{S} \right|$$

2.2 Un opérateur différentiel : le gradient

2.2.1 Approche intuitive

Considérons une grandeur physique ξ dépendant du lieu où l'on se place : typiquement, ξ est une fonction des trois variables d'espaces, ce que l'on appelle les coordonnées $(x; y; z)$.

$$\begin{aligned}\xi &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ &: x \mapsto \xi(x; y; z)\end{aligned}$$

On dit que ξ est un champ de scalaires : en effet, en tout point de l'espace, on peut associer un scalaire, c'est-à-dire un réel (par opposition à un vecteur). La question est de savoir comment on peut caractériser l'évolution de ce champ lorsque l'on se déplace dans l'espace. Pour cela, on connaît la notion de différentielle. Si on arrive à définir les dérivées partielles et que celles-ci sont continues, d'après le théorème, ξ est différentiable et l'on a :

$$d\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right) dz$$

Rappelons que $d\xi$ représente un accroissement infinitésimal de la grandeur ξ .

Rappelons aussi que dans un repère cartésien, les vecteurs de la base $(\vec{u}_x; \vec{u}_y; \vec{u}_z)$ sont fixes (constants en direction **et** en norme); ainsi un déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{OM} = \vec{dl} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

La différentielle $d\xi$ de ξ peut donc être vue comme le **produit scalaire** du vecteur \vec{dl} par un vecteur au point $(x; y; z)$:

$$\begin{aligned}\xi &= \overrightarrow{grad}\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{pmatrix} \\ d\xi &= \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{dl}\end{aligned}$$

Par définition, ce vecteur est appelé **gradient** de ξ au point $(x; y; z)$.

2.2.2 Définition

Soit ξ un champ scalaire de l'espace

$$\begin{aligned}\xi &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ &: x \mapsto \xi(x; y; z)\end{aligned}$$

On définit le **vecteur gradient** de ξ comme étant le vecteur :

$$\xi = \overrightarrow{grad}\xi = \vec{\nabla} \xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Attention, le gradient est un opérateur *différentiel* (il fait intervenir les dérivées partielles de ξ), *linéaire* (le gradient d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des gradients) et *transforme une fonction scalaire en vecteur*.

2.2.3 Interprétation physique

Orthogonalité aux lignes de niveau

Soit une L ligne de niveau λ de ξ i.e. une ligne où la fonction ξ reste constante et vaut λ , et \vec{dl} un vecteur élémentaire lorsque l'on parcourt cette ligne de niveau.

$$L = \{M \in \text{Plan} / \xi(M) = \lambda\}$$

Alors on a :

$$d\xi = \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{dl} = 0$$

Le produit scalaire étant nul, on en déduit que $\vec{\nabla}\xi$ est **orthogonal** aux lignes de niveau. Typiquement, sur une carte géographique ou météorologique, on sait que le vecteur gradient de température est orthogonal aux lignes isothermes.

Remarque : en généralisant à l'espace et non plus au plan, on obtient des "surfaces de niveau".

Pointage dans la direction de croissance

$\vec{\nabla}\xi$ pointe dans la direction des ξ croissants, autrement dit, le gradient nous indique la direction de montée.

PREUVE : $d\xi = \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{dl} > 0$.

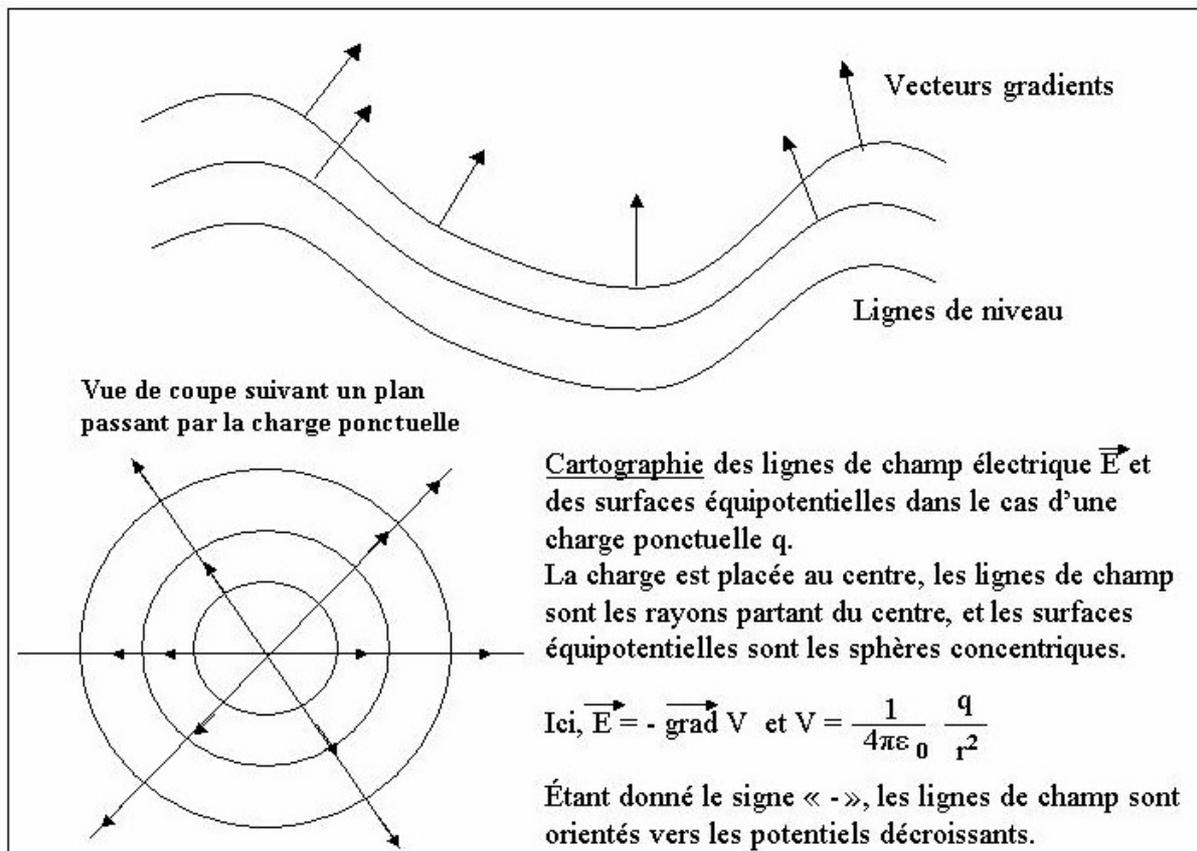


FIG. 7 – Propriétés du gradient, exemple

Force dérivant d'une énergie potentielle E_p

Soit un corps soumis à une force \vec{F} . On dit que \vec{F} dérive d'une énergie potentielle E_p s'il existe une telle fonction E_p telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = -\vec{\nabla}E_p$$

Souvent, on va "à l'envers" et l'on essaye de trouver une telle fonction par intégration de \vec{F} . La fonction E_p est alors définie à une constante (d'intégration près) que l'on fixe arbitrairement.

Exemples

Quelques énergies potentielles :

→ Énergie potentielle de pesanteur : $E_{p_{\text{pesanteur}}} = mgz + \text{cste}$

→ Énergie potentielle élastique : $E_{p_{\text{élastique}}} = \frac{1}{2}k \cdot (\Delta l)^2 + \text{cste}$

→ Énergie potentielle électrostatique : $E_{p_{\text{électrostatique}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + \text{cste}$: la constante est choisie nulle à l'infinie.

Comme l'énergie potentielle est définie à une constante près, la constante d'intégration n'est pas importante puisque, comme on le verra dans la suite, seule compte la variation d'énergie potentielle (qui se convertira en énergie cinétique), ainsi, la constante choisie arbitrairement s'en va.

Exemple détaillé de calcul d'une énergie potentielle

Considérons une masse accrochée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . En raison de la force de rappel, la masse est soumise à une énergie potentielle dite "élastique" E_p . Fixons l'origine du repère en O lorsque le ressort n'est ni étiré, ni comprimé, c'est-à-dire, lorsque la longueur du ressort est égale à la longueur à vide l_0 : x désigne donc l'élongation du ressort (si le ressort est étiré, $x \geq 0$ et inversement, si $x \leq 0$, le ressort est comprimé.)

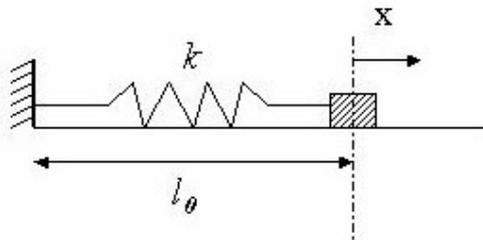


FIG. 8 – Ressort simple

La force de rappel s'écrit : $\vec{F} = -kx \vec{i}$ où \vec{i} est le vecteur unitaire sur l'axe orienté du ressort. Un élément de travail de cette force s'écrit : $\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -kx \vec{i} \cdot dx \vec{i} = -kx dx$ puisque l'élément de déplacement de la masse ne peut se faire que selon \vec{i} . Comme par définition, $\delta W_{\vec{F}} = -kx dx = -dE_p$, on en déduit par intégration que $E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cste}$. Or, en $x = 0$, le ressort n'est ni étiré, ni comprimé car cela résulte de notre choix (tout à fait arbitraire !) de prendre l'origine en ce point O. Le ressort n'y étant ni comprimé, ni étiré, l'énergie potentielle élastique est nécessairement nulle, et donc $\text{cste} = 0$. Évidemment, si l'on avait choisi une origine ailleurs, la constante serait différente !

Remarque essentielle

Les énergies cinétique E_c et potentielle E_p sont définissables à chaque instant et n'importe où : on dit que ce sont des **grandeurs d'état**, c'est-à-dire qu'elles définissent un état du corps. Une variation élémentaire de ces grandeurs résultent d'une différence de ces grandeurs entre deux états infiniment voisins :

$$dE_p = E_p(\text{état infiniment proche de l'état initial}) - E_p(\text{état initial})$$

de la même façon qu'une variation quelconque de ces grandeurs résulte de la simple différence de ces grandeurs entre les états initiaux et finaux.

En revanche, le travail d'une force \vec{F} n'est pas une quantité susceptible d'être définie à chaque instant : au contraire, le travail se définit au cours d'un mouvement et l'on parle de "travail au cours d'un déplacement". Ainsi, au cours d'un déplacement élémentaire, on ne peut pas écrire dW car ce travail élémentaire ne peut pas s'écrire comme une "différence de W entre deux états infiniment voisins". On note donc ce "petit travail créé au cours du déplacement" δW et on dit que δW n'est pas une différentielle **totale**. **Le travail d'une force dépend du chemin suivi** et on dit que l'intégrale

$$\int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

est une intégrale curviligne, dans le sens où il ne suffit pas de faire une différence de la primitive (quand elle est calculable !) évaluée aux bornes A et B. En termes simples, les intégrales des fonctions classiques ne dépendent que des valeurs de leur primitive aux bornes d'intégration et pas de ce qui peut se passer "entre". Ici au contraire, il va falloir calculer chaque " $\vec{f} \cdot d\vec{l}$ " et les sommer : on a alors souvent besoin de résolutions numériques approchées car le calcul formel est inextricable, pour ne pas dire impossible...

Il est aussi nécessaire de remarquer que lorsque le champ de force est uniforme, la force appliquée au système est identique en tout point du trajet, si bien que le travail total se réduit au produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{AB}$.

PREUVE :

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_{AB} d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

(D'ailleurs, sur un parcours élémentaire $d\vec{l}$, on suppose que la force y est localement uniforme pour pouvoir dire que $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{l}$)

Cependant, lorsque \vec{F} dérive d'une énergie potentielle,

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

Dans ce cas particulier, et ce cas **seulement**, δW devient une différentielle totale.

Une conséquence : l'intégrale première de l'énergie mécanique

Soit un corps de masse m soumis à un ensemble de forces \vec{F}_i dérivant toutes d'une énergie potentielle E_{p_i} dont la résultante est $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. De même, on note $E_p = \sum_i E_{p_i}$ l'énergie potentielle résultante.

D'après le **Théorème de l'Énergie Cinétique (TEC)**, on a :

$$dE_c = \delta W_{\vec{F}} = -dE_p$$

puisque \vec{F} dérive d'une énergie potentielle. Ainsi, $dE_c = -dE_p \iff dE_c + dE_p = d(E_c + E_p) = 0$. L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ se **conserv**e au cours du mouvement i.e. $E_m = \text{constante}$. On parle d'intégrale première de l'énergie mécanique.

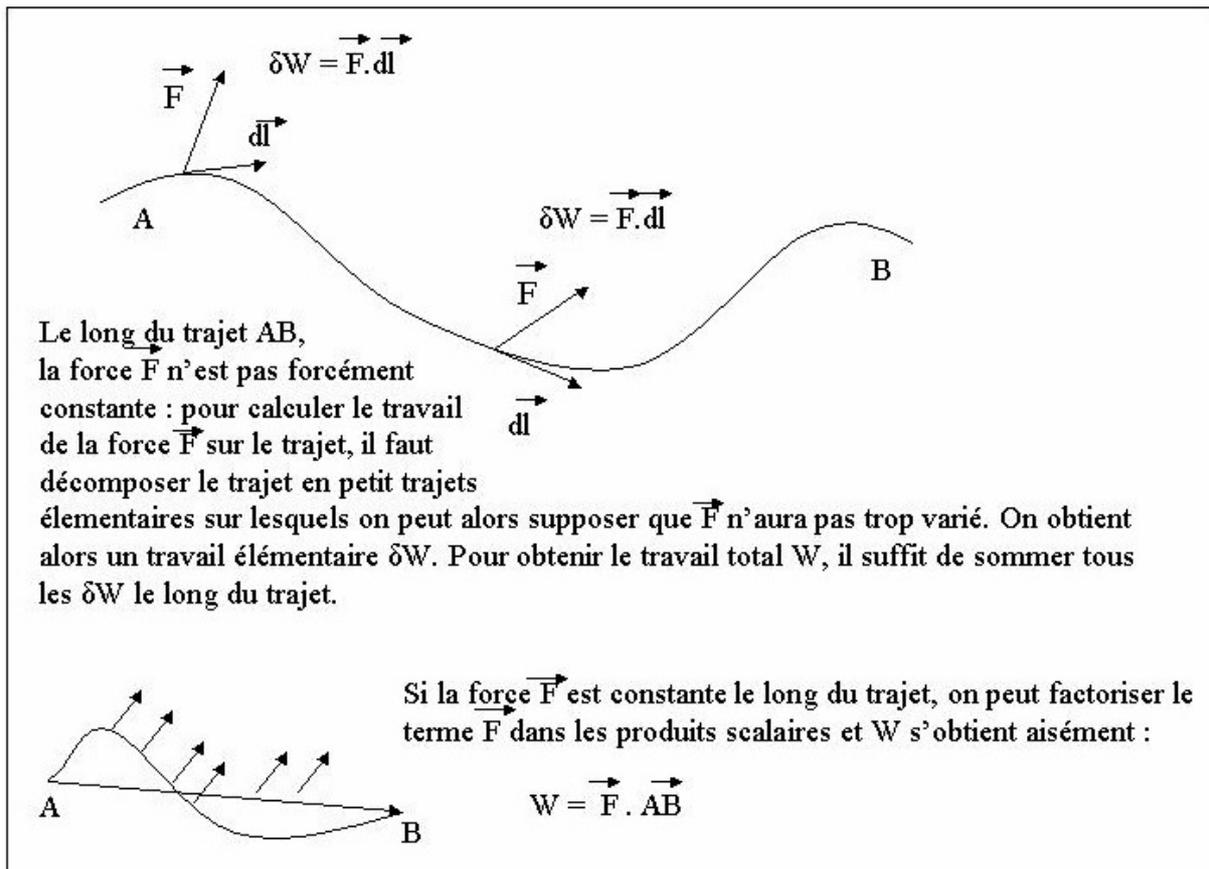


FIG. 9 – Travail d'une force

Généralisation : “Théorème de l’Énergie Mécanique”

Nous pouvons énoncer le théorème de l’énergie mécanique (TEM)

Théorème 5 (Théorème de l’énergie cinétique). *L’énergie mécanique d’un système matériel se conserve si le système est uniquement soumis à des forces conservatives. La seule source de perte d’énergie sont les forces non conservatives : la diminution d’énergie mécanique est alors égale au travail de ces forces non conservatives, dites aussi dissipatives.*

PREUVE :

Il suffit de reprendre la démonstration précédente en faisant le tri entre les différentes forces en jeu :

$$dE_c = \delta W_{\vec{F}_{conservatives} + \vec{F}_{non\ conservatives}} = \delta W_{\vec{F}_{cons}} + \delta W_{\vec{F}_{non\ cons}} = -dE_p + \delta W_{non\ cons}$$

On en déduit donc que :

$$dE_m = \delta W_{non\ conservatives}$$

Typiquement, les forces non conservatives sont les forces de type frottement.

Remarques

- Le *Théorème de l’énergie cinétique* et le *Théorème de l’énergie mécanique* ne sont en fait que des formes différentes d’un même bilan énergétique : il est bien important de comprendre que l’on peut utiliser l’un ou l’autre indifféremment du moment que l’on a comptabilisé **une et une seule fois** chaque terme énergétique (travail, énergie potentielle). L’erreur est de compter deux fois, voire plus chaque élément : on choisit le TEM ou le TEC et l’on s’y tient jusqu’au bout.
- S’il est vrai que l’on a l’équivalence “Travaux des forces de frottements \Leftrightarrow Diminution de l’énergie mécanique E_m ”, il ne faut en revanche **jamais** faire l’association “Travaux des forces de frottements \Leftrightarrow Diminution de l’énergie cinétique E_c (donc de vitesse)”. C’est vrai en général, mais pas tout le temps. Un des exemples les plus célèbres est celui du satellite en orbite circulaire autour de la Terre. Les calculs nous donnent :

$$E_c = G \frac{m_s M_T}{2r}$$

et

$$E_m = -G \frac{m_s M_T}{2r} = -E_c \quad (E_m < 0 : \text{le système est dans un état lié})$$

Ainsi, $dE_m = -dE_c$: si des forces de frottements devaient s’appliquer sur le satellite (on peut imaginer des frottements avec l’air de l’atmosphère si le satellite est en orbite circulaire basse autour de la Terre), l’énergie mécanique diminuerait. En revanche, l’énergie cinétique, quant à elle, augmente et donc la vitesse du satellite par la même occasion ! Bien évidemment, le satellite se scratche, mais il s’agit d’une illustration visant à montrer que les frottements ne font pas toujours que ralentir un système en mouvement...
