

Analyse vectorielle – systèmes de coordonnées

1 Systèmes de coordonnées : représentation du point

Les coordonnées cartésiennes employées habituellement pour représenter un point dans l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ ne sont pas toujours les plus appropriées. On retiendra deux autres types de coordonnées pour décrire un point ou une champ scalaire : les **coordonnées cylindriques** et les **coordonnées sphériques**.

1.1 Coordonnées cartésiennes du point

L'espace $\mathbb{R}^3$ est défini classiquement dans un système de coordonnées cartésien fixe défini par un repère orthonormé fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Dans un tel système, un point M est défini par ses coordonnées $M=(x, y, z)$.

1.2 Coordonnées cylindriques du point

Note : les coordonnées cylindriques sont grosso modo une extension à trois dimensions des coordonnées polaires.

La Figure 1 illustre la situation d'un point M dans l'espace. Pour un repère d'origine O déterminé, ce point M sera défini par (x, y, z) dans le système de coordonnées cartésiennes et (r, φ, z) dans le système de coordonnées cylindriques.

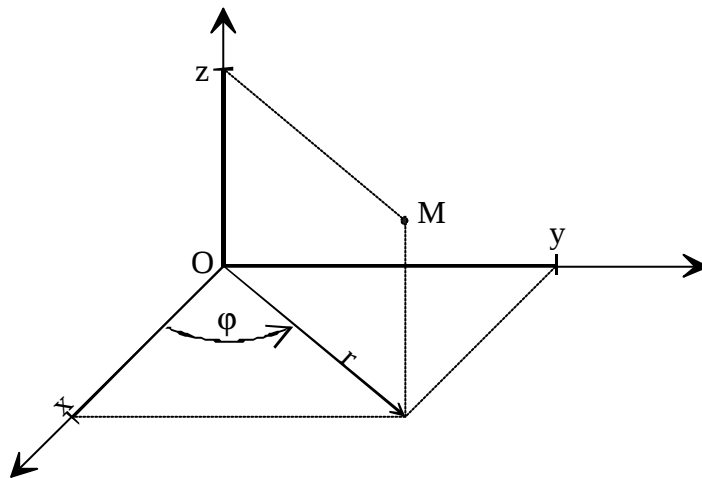


Figure 1

Les transitions dans l'un et l'autre des systèmes est le suivant :

coord. cartésiennes $\rightarrow$ coord. cylindriques	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$
coord. cylindriques $\rightarrow$ coord. cartésiennes	$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$ $z = z$

1.2.1 Exemple

Trouver, en coordonnées cylindriques, l'équation de la sphère de rayon a définie dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes par :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (1)$$

En remplaçant x , y et z par leurs coordonnées sphériques, on trouve :

$$r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi) + z^2 = a^2 \quad (2)$$

En simplifiant encore :

$$r^2 + z^2 = a^2 \quad (3)$$

1.2.2 Exemple

Trouver, en coordonnées cylindriques, l'équation du plan défini dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes par :

$$z = x + y \quad (4)$$

En remplaçant x , y et z par leurs coordonnées sphériques, on trouve :

$$z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \quad (5)$$

En simplifiant encore :

$$z = \sqrt{2} \cdot r \cdot \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \quad (6)$$

1.2.3 Exemple

Trouver, en coordonnées cartésiennes, l'équation de la surface définie dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cylindriques par :

$$r = \varphi + z \quad (7)$$

En remplaçant r et φ par leurs coordonnées cartésiennes respectives, on trouve :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} - \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (8)$$

1.3 Coordonnées sphériques du point

La Figure 2 illustre la situation d'un point M dans l'espace. Pour un repère d'origine O déterminé, ce point M sera défini par (x, y, z) dans le système de coordonnées cartésiennes et (r, φ, θ) dans le système de coordonnées sphériques. Il est très important de noter que la coordonnée r est ici très différente de la coordonnée r des coordonnées cylindriques !

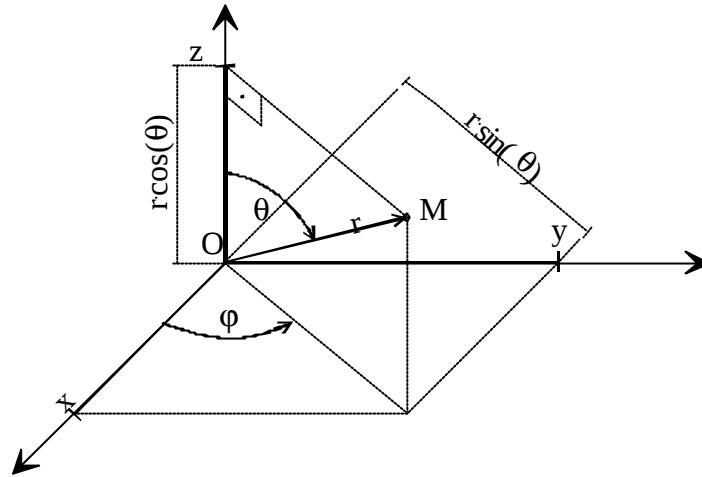


Figure 2

Les transitions dans l'un et l'autre des systèmes est le suivant :

coord. cartésiennes $\rightarrow$ coord. sphériques	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$ $\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$
coord. sphériques $\rightarrow$ coord. cartésiennes	$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$ $z = r \cdot \cos(\theta)$

1.3.1 Exemple

Trouver, en coordonnées sphériques, l'équation de la sphère de rayon a définie dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes par :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (9)$$

En remplaçant x, y et z par leurs coordonnées sphériques, on trouve :

$$r^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi) + r^2 \cdot \cos^2(\theta) = a^2 \quad (10)$$

En simplifiant encore :

$$r = a \quad (11)$$

2 Systèmes de coordonnées: représentation du vecteur.

Les systèmes de coordonnées cartésiens employés habituellement pour représenter un vecteur dans l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ ne sont pas toujours les plus appropriées. On retiendra deux autres systèmes de coordonnées pour décrire un vecteur ou un champ vectoriel : le **système de coordonnées cylindriques** et le **système de coordonnées sphériques**.

2.1 Système de coordonnées cartésien

L'espace $\mathbb{R}^3$ est défini classiquement dans un système de coordonnées cartésien fixe défini par un repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Dans un tel système, un vecteur v est défini par ses coordonnées a_x, a_y et a_z , sachant que :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{u}_x + a_y \cdot \vec{u}_y + a_z \cdot \vec{u}_z \quad (12)$$

2.2 Système de coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques est défini par le repère **mobile** $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ illustré par la Figure 3. Soit M' la projection de M sur le plan xOy ; les vecteurs $\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi$ et $\vec{u}_z$ ont été reportés en pointillé sur M' pour expliquer leur construction.

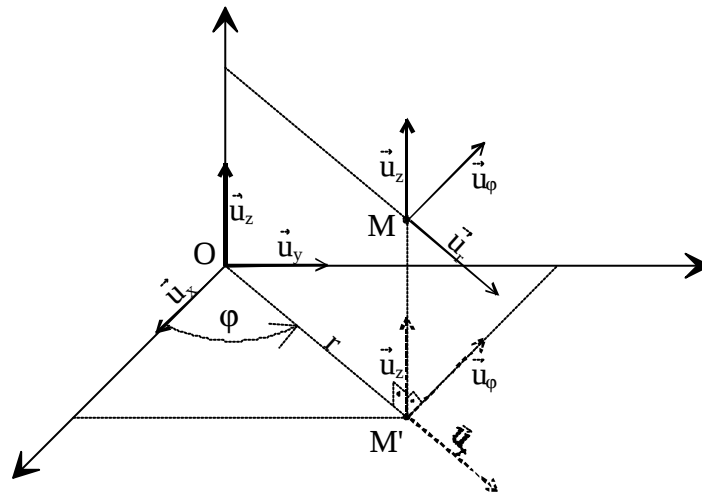


Figure 3

On remarque :

- $\vec{u}_r$ est parallèle au segment OM'.
- $\vec{u}_\phi$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$ dans le plan xOy et son sens est celui de ϕ .
- $\vec{u}_z$ ne change pas par rapport aux coordonnées cartésiennes.
- Le repère mobile est orthonormé : les trois vecteurs $\vec{u}_r, \vec{u}_\phi$ et $\vec{u}_z$ sont perpendiculaires l'un à l'autre et de module 1.

2.2.1 Transformations de bases

Un vecteur v exprimé par $(a_x, a_y, a_z)^T$ dans le repère fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est transformé dans les coordonnées $(a_r, a_\phi, a_z)^T$ du repère mobile $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$ au moyen de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\phi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

Inversement, un vecteur v exprimé par $(a_r, a_\phi, a_z)^T$ dans le repère mobile $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$ est transformé dans les coordonnées $(a_x, a_y, a_z)^T$ du repère fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ au moyen de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_r \\ a_\phi \\ a_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

On constate pour la matrice de transformation T que $T^T = T^{-1}$, ce qui est normal dans une transformation de bases orthonormées.

2.2.2 Exemple

Soit v le vecteur défini ainsi dans le repère fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{<\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z>}$$

Soit encore le point $M=(1, 1, 1)$. Chercher les coordonnées du vecteur v dans le repère mobile $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$.

On cherche tout d'abord les valeurs r , φ et z de ce point en coordonnées cylindriques. On trouve :

$$r = \sqrt{2}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$z = 1$$

On trouve enfin :

$$v_{\langle u_r, u_\varphi, u_z \rangle} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\langle u_x, u_y, u_z \rangle} = \begin{pmatrix} 2.121 \\ 0.707 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

2.3 Système de coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques est défini par le repère **mobile** $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ illustré par la Figure 4. Soit M' la projection de M sur le plan xOy ; le vecteur $\vec{u}_\varphi$ a été reporté en pointillé sur M' pour expliquer sa construction.

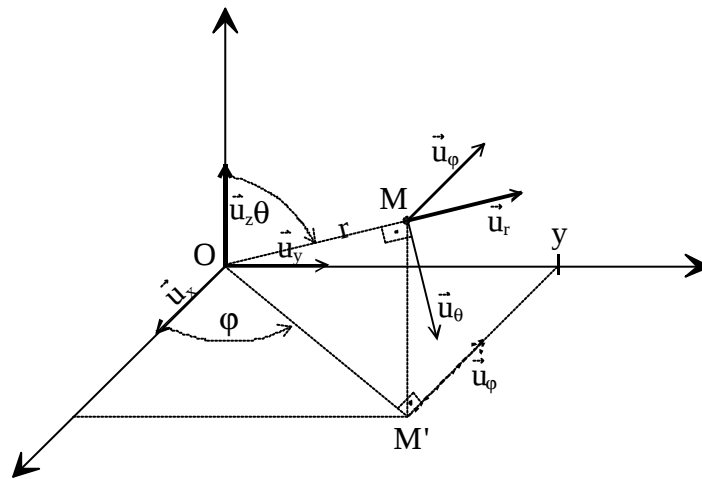


Figure 4

On remarque :

- $\vec{u}_r$ est parallèle au segment OM.
- $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$ dans le plan MOz et son sens est celui de θ .
- $\vec{u}_\varphi$ est perpendiculaire à $\vec{u}_r$ dans le plan xOy et son sens est celui de φ .
- Le repère mobile est orthonormé : les trois vecteurs $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ sont perpendiculaires l'un à l'autre et de module 1.

2.3.1 Transformations de bases

Un vecteur v exprimé par $(a_x, a_y, a_z)^T$ dans le repère fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est transformé dans les coordonnées $(a_r, a_\varphi, a_\theta)^T$ du repère mobile $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ au moyen de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (16)$$

Inversement, un vecteur v exprimé par $(a_r, a_\varphi, a_\theta)^T$ dans le repère mobile $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est transformé dans les coordonnées $(a_x, a_y, a_z)^T$ du repère fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ au moyen de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix} \quad (17)$$

A nouveau on constate pour la matrice de transformation T que $T^T = T^{-1}$, ce qui est normal dans une transformation de bases orthonormées.

2.3.2 Exemple

Soit v le vecteur défini ainsi dans repère fixe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{<\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z>}$$

Soit encore le point $M=(1, 1, 1)$. Chercher les coordonnées du vecteur v dans le repère mobile $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

On cherche tout d'abord les valeurs r , φ et z du point M en coordonnées cylindriques. On trouve :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3} \\ \varphi &= 45 \text{ deg} \\ \theta &= 54.74 \text{ deg} \end{aligned}$$

On trouve enfin :

$$\mathbf{v}_{\langle u_r, u_\theta, u_\phi \rangle} = \begin{pmatrix} 0.577 & 0.577 & 0.577 \\ 0.408 & 0.408 & -0.817 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\langle u_x, u_y, u_z \rangle} = \begin{pmatrix} 3.464 \\ -1.225 \\ 0.707 \end{pmatrix} \quad (18)$$

3 Intégrales triples

Les intégrales sur un volume ne se résolvent évidemment pas de la même manière suivant le type de coordonnées choisi. En particulier, l'élément infinitésimal dV est différent. Suivant le changement de variable requis, on trouve dV en calculant le **jacobien** du changement de variable effectué. Nous n'allons pas entrer dans les détails de l'analyse de ce jacobien, et nous allons donner directement dV pour les trois systèmes de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique. Pour illustrer notre propos, le volume d'une sphère sera à chaque fois calculé. On montre facilement :

$$V_{\text{sphère}} = \iiint_V 1 \cdot dV \quad (19)$$

3.1 Coordonnées cartésiennes

L'élément dV est ici le plus simple possible :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (20)$$

Exemple : calcul du volume d'une sphère de rayon R .

Les bords de notre volume d'intégration sont définis par la surface de la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (21)$$

On calcule donc le volume :

$$\begin{aligned} V_{\text{sphère}} &= \iiint_V 1 \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{x=-R}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \cdot dy \cdot dx \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{x=-R}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2 \cdot \sqrt{R^2-x^2-y^2} \cdot dy \cdot dx \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{x=-R}^R \left(y \cdot \sqrt{R^2-x^2-y^2} + [R^2-x^2] \cdot \arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} \right) \right) \Big|_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cdot dx \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{x=-R}^R 2 \cdot [R^2-x^2] \cdot \frac{\pi}{2} \cdot dx \end{aligned}$$

$$V_{\text{sphère}} = \pi \cdot \left(R^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-R}^R$$

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Comme c'est compliqué ! On est parti pourtant d'un cas simple. Ceci illustre que lorsque on intègre dans un volume sphérique (resp. cylindrique), les coordonnées cartésiennes ne sont pas bien adaptées. On verra qu'un changement dans les coordonnées sphériques (resp. cylindriques) va considérablement simplifier notre problème.

3.2 Coordonnées cylindriques

L'élément dV est le suivant :

$$dV = r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz \quad (22)$$

Exemple : calcul du volume d'une sphère de rayon R .

Les bords de notre volume d'intégration sont définis par la surface de la sphère :

$$r^2 + z^2 = R^2 \quad (23)$$

On calcule donc le volume :

$$\begin{aligned} V_{\text{sphère}} &= \iiint_V r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{z=-R}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{z=-R}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} (R^2 - z^2) \cdot d\phi \cdot dz \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{z=-R}^R \pi \cdot (R^2 - z^2) \cdot dz \\ V_{\text{sphère}} &= \pi \cdot \left(R^2 \cdot z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{z=-R}^R \\ V_{\text{sphère}} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \end{aligned}$$

On voit ici quelque chose d'intéressant : comme l'équation de la sphère (23) est indépendante de ϕ , on peut simplement 'sortir' $d\phi$ de l'intégrale triple.

On aurait pu simplifier dès le départ :

$$\int_{z=-R}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz = \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right) \cdot \left(\int_{z=-R}^R \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r \cdot dr \cdot dz \right) = 2\pi \cdot \int_{z=-R}^R \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r \cdot dr \cdot dz \quad (24)$$

Ce phénomène de simplification est encore plus marqué en coordonnées sphériques.

3.3 Coordonnées sphériques

L'élément dV est le suivant :

$$dV = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta \quad (25)$$

Exemple : calcul du volume d'une sphère de rayon R .

Les bords de notre volume d'intégration sont définis par la surface de la sphère :

$$r = R \quad (26)$$

On calcule donc le volume :

$$\begin{aligned} V_{\text{sphère}} &= \iiint_V r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{R^3}{3} \cdot \sin(\theta) \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ V_{\text{sphère}} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{2\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \\ V_{\text{sphère}} &= \frac{2\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \left. -\cos(\theta) \right|_{\theta=0}^{\pi} \\ V_{\text{sphère}} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \end{aligned}$$

Ici également, on peut simplifier. Comme l'équation de la sphère (26) est indépendante de φ et θ , on peut simplement 'sortir' $d\varphi$ et $d\theta$ de l'intégrale triple.

On aurait pu écrire dès le départ :

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta = \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) \cdot d\theta \right) \cdot \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_{r=0}^R r^2 \cdot dr \right) = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \quad (27)$$